Brentano und Leser,
Sammlung älterer und neuerer
staatswissenschaftlicher Schriften
des In- und Auslandes
Nr. 9.

Die Grundlage der modernen Wertlehre:

Daniel Bernoulli,

Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen.

Herausgegeben
von

A. Pringsheim.



Leipzig
Verlag von Duncker & Humblot
1896.

Ankündigung.

Sammlung
älterer und neuerer
staatswissenschaftlicher Schriften
des
In- und Auslandes.

Herausgegeben von

Dr. Lujo Brentano, Geh. Hofrat und Prof. an der Universität München, und **Dr. Emanuel Leser,** Professor an der Universität Heidelberg.

Es giebt vielleicht keine wissenschaftliche Disciplin, welche heute so sehr unter der Unkenntnis des in früheren Jahrhunderten und in andern Ländern Geleisteten litte, wie das Studium der wirtschaftlichen und socialen Erscheinungen.

Daher findet man selbst bei angesehenen Schriftstellern, geschweige denn in der öffentlichen Presse oft die irrigsten Urteile, wo von dem Werdegang des ökonomischen Denkens und seinen Trägern die Rede ist; daher ferner der häufige Rückfall in längst widerlegte Anschauungen; daher auch die vielen schiefen Äusserungen über die wirtschaftlichen und socialen Erscheinungen und Bestrebungen anderer Länder.

Die Ursachen dieser Übelstände erblicken die Herausgeber in der schweren Zugänglichkeit vieler wichtiger Schriften der Vergangenheit und in der fremden Sprache mancher bedeutungsvoller Arbeiten der Gegenwart.

Sie haben sich daher vereinigt, um mit Hülfe anderer Kollegen dem deutschen Studierenden der Staats- und Socialwissenschaften eine Anzahl schwer zugänglicher oder in fremder Sprache geschriebener Schriften darzubieten. Sie beabsichtigen dabei jedwede Einseitigkeit der Richtung zu vermeiden. Ältere wie neuere Finanz- und Wirtschaftsschriftsteller, Merkantilisten wie Physiokraten, Freihändler wie Schutzzöllner, Vertreter agrarischer wie gewerblicher Interessen, orthodoxe Nationalökonomen wie Socialisten sollen die gleiche Berücksichtigung finden. Einzig maſsgebend für die Herausgabe soll sein die Bedeutung der Schrift. Auch sollen Schriften, die längst in aller Hand sind, von der Herausgabe ausgeschlossen bleiben.

Erschienen sind bis jetzt:

1. **Mrs. Sidney Webb (Beatrice Potter): Die britische Genossenschaftsbewegung.** Herausgeg. von *L. Brentano.* Preis 4 M.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlags.

Die Grundlage der modernen Wertlehre:

Daniel Bernoulli,

Versuch einer neuen Theorie

der

Wertbestimmung von Glücksfällen.

Die Grundlage der modernen Wertlehre:

Daniel Bernoulli,

Versuch einer neuen Theorie

der

Wertbestimmung von Glücksfällen

(Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis).

Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen

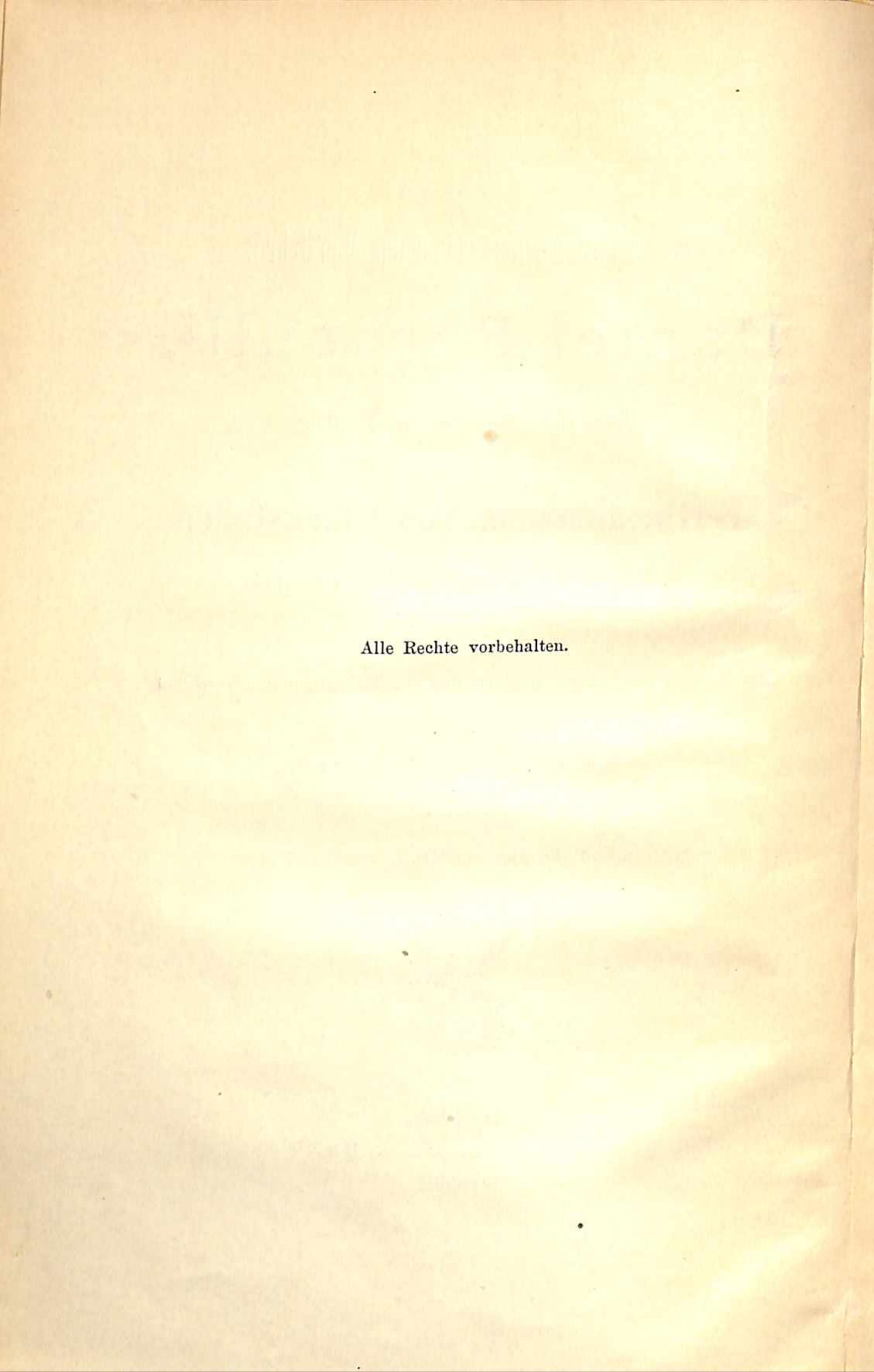
von

Professor Dr. Alfred Pringsheim.

Mit einer Einleitung von Dr. Ludwig Fick.



Leipzig,
Verlag von Duncker & Humblot.
1896.



Einleitung.

In den letzten Jahrzehnten ist eine der Hauptlehren der theoretischen Nationalökonomie, die Lehre vom Wert, wiederholt von verschiedenen Seiten einer gründlichen Revision unterzogen worden. Die ältere Wissenschaft betrachtete den Wert als etwas den Gütern innewohnendes, als ein Verhältnis zwischen einem Gut und einem anderen, oder als das Verhältnis zwischen einem Gut und der Gesamtmasse der übrigen Güter. Wenn auch manche unserer Klassiker, wie namentlich Thomas Robert Malthus, in ihren allgemeinen Erörterungen erkennen und betonen, dafs der Wert nichts anderes ist, als die Achtung, in der ein Gut bei den Menschen, die seiner bedürfen, steht, so hielt doch die Mehrzahl der führenden Geister an der Anschauung fest, eine solche Auffassung des Wertes sei für die Volkswirtschaftslehre unfruchtbar. Es war herkömmlich, die Formen, in denen der Wert in Erscheinung tritt, und die man als Gebrauchs- und Tauschwert unterschied, für Dinge ganz verschiedener Art zu halten; ja, manche Theoretiker gingen so weit, diese Begriffe als Gegensätze zu bezeichnen. Den Gebrauchswert hielt man in der oberflächlichen Betrachtung, die man ihm widmete, für dasselbe wie die Nützlichkeit und wufste mit ihm nicht viel anzufangen; man wandte sich deshalb zum Tauschwert, den man eingehender Forschung

unterzog. Während man unter Tauschwert meist das verstand, was man heute vielfach — vielleicht nicht ganz glücklich — „objektiven Tauschwert“ nennt, war man sich im Verlauf der Untersuchung gewöhnlich nicht bewufst, dafs man nur eine der Erscheinungsformen des Wertes vor sich hatte, sondern man glaubte in den Erörterungen über den Tauschwert eine erschöpfende Wertlehre zu liefern.

Bei ihren Forschungen waren die meisten Autoren in dem sinnenfälligen Schein, den der Tauschverkehr des gewöhnlichen Lebens darbot, befangen. Man sah, dafs die Menschen Güter, die sie in ihrem Besitz haben, untereinander austauschen, und meinte, solche Güter, die gegeneinander vertauscht zu werden pflegen, müfsten irgend eine Eigenschaft in gleichem Grade besitzen. Diese gemeinsame Eigenschaft glaubte man in ihrem Wert zu finden, und so kam man zu der Auffassung, dafs die Güter, die im Tauschverkehr gegeneinander umgesetzt werden, gleichwertig seien; der Wert war damit zu einer Eigenschaft der Güter gemacht. Diese Auffassung des Wertes ging aus dem schon erwähnten Umstande hervor, dafs man sich fest an den Tauschwert anklammerte, dabei aber behauptete, den Wert im allgemeinen zu untersuchen. Es ist eigentlich wunderbar, dafs man dazu kam, die Anschauung zu hegen, beim Tausche würden gleichwertige Güter gegeben und empfangen, während eine aufmerksame Beobachtung der Vorkommnisse des täglichen Lebens lehren kann, dafs niemals gleiche Werte ausgetauscht werden, sondern dafs jeder Tauschende ein Gut, dessen Wert (für ihn) geringer ist, hingiebt, um ein solches von höherem Wert zu erlangen. Wenn man davon ausgeht, dafs gleiche Werte ausgetauscht werden, so ist gar kein Grund einzusehen, warum die Menschen überhaupt miteinander tauschen; durch diese Schwierigkeit ist es wohl zu erklären, dafs

Adam Smith auf die sonderbare Annahme kam, es sei dem Menschen ein Tauschtrieb eingeboren.

Daſs die eben geschilderte Lehre, nach welcher der Wert eine in den Gütern selbst liegende Eigenschaft ist, niemals zur unumschränkten Herrschaft gelangte, kann nicht bestritten werden. Besonders in Deutschland machten sich Strömungen geltend, die andere, wir können wohl sagen: richtigere, Anschauungen vom Wesen des Wertes hatten. Aber lange Zeit kam es auf dieser Seite nicht weiter als bis zu vereinzelten Anläufen, und die sogenannte klassische Werttheorie behielt die Oberhand; vor allem deswegen, weil keine ausgebildete Theorie da war, die den Kampf hätte aufnehmen können. Der Bau der klassischen Wertlehre, an dem so viele scharfsinnige Köpfe gearbeitet hatten, war so fest gefügt und in einigen Teilen von so bestechender Klarheit, daſs die zerstreuten Bemerkungen einzelner Gelehrten, die eine grundsätzlich andere Auffassung des Wertproblems verrieten, nicht dagegen in die Wagschale fallen konnten, um so weniger, als die Urheber solcher Bemerkungen sich nur selten der Tragweite dessen, was sie vorgebracht hatten, bewuſst waren und deshalb selbst nicht folgerichtig auf ihrem Standpunkt verharrten. Vielleicht der einzige Mann, der sich der Wichtigkeit seiner abweichenden Ansichten bewuſst war, und der auch von seinem Standpunkt aus den Versuch machte, die Erscheinungen des menschlichen Verkehrs vollständig zu erklären, war Gossen[1]; aber sein Buch blieb unbeachtet und konnte infolge dessen die herrschende Theorie nicht stürzen.

Es ist das Verdienst von Jevons[2], Menger[3] und

---

[1] Entwickelung der Gesetze des menschlichen Verkehrs, Braunschweig 1854.

[2] The theory of political economy. London 1871; 3. Aufl. 1888.

[3] Grundsätze der Volkswirtschaftslehre. Wien 1871.

Walras[1], der alten Werttheorie eine neue Lehre entgegengestellt zu haben, die allen Erscheinungen unseres Wirtschaftslebens gerecht zu werden strebt, und die den Kampf gegen die alten Anschauungen mit Erfolg aufnahm. Dafs diese drei Männer ziemlich gleichzeitig und gänzlich unabhängig von einander ihre Lehrgebäude errichteten, ist bekannt. Gleichwohl zeigen in manchen wichtigen Beziehungen ihre Gedankengänge eine merkwürdige Übereinstimmung. Man pflegt heute diese neuen Werttheorien, anlehnend an Wiesers geschickt gewählten Ausdruck, als Grenznutzentheorien zu bezeichnen, und es ist nicht zu leugnen, dafs der Begriff des Grenznutzens (von Jevons „final degree of utility“[2] und von Walras — wohl weniger glücklich — „rareté“[3] genannt) der gemeinsame Eckstein dieser Systeme genannt werden darf.

In der Lehre vom Grenznutzen tritt die wichtige Auffassung hervor, durch die sich die moderne Wertlehre hauptsächlich von der klassischen unterscheidet, nämlich die Auffassung, dafs der Wert nicht eine Eigenschaft eines Gutes an sich, sondern dafs er eine Beziehung zwischen einem einzelnen wirtschaftenden Subjekt und einem Gute ist; ferner kommt darin die nicht minder wichtige Auffassung zum Ausdruck, dafs der Begriff des Wertes gar nicht losgelöst von der Vorstellung einer bestimmt begrenzten Quantität gedacht werden kann[4]. Man kann z. B. nicht von dem Wert des Eisens oder der Baumwolle schlechtweg reden, man kann auch

---

[1] Éléments d'économie politique pure. Lausanne, Paris, Basel 1874, 1877. Théorie mathématique de la richesse sociale. Lausanne, Paris, Rom, Leipzig 1883. Übersetzt von v. Winterfeld unter dem Titel: Mathematische Theorie der Preisbestimmung der wirtschaftlichen Güter. Stuttgart 1881.

[2] Theory of pol. econ., 3. Aufl. S. 51.

[3] Théorie mathém. de la rich. soc. S. 20.

[4] Vgl. Lujo Brentano im Jahrbuch für Gesetzgebung, Verwaltung und Volkswirtschaft im Deutschen Reich. II, 571.

nicht beurteilen, ob das Eisen oder die Baumwolle wertvoller ist, sondern man kann stets nur von dem Wert einer bestimmten Menge dieser Güter reden. Die Thatsache, dafs das Werturteil stets von der Vorstellung einer Menge begleitet sein mufs, ist freilich so einleuchtend, dafs sie auch von den älteren Theoretikern nicht ganz übersehen werden konnte; aber aus dem Umstand, dafs dieser Thatsache nicht die genügende Beachtung geschenkt wurde, erklären sich manche der sonderbaren Irrwege, auf denen sich die alte Theorie mitunter bewegte.

Jevons, Menger und Walras nahmen, jeder in seiner Weise, die Quantitätsverhältnisse zum Ausgangspunkt ihrer Betrachtung. Die Wertschätzung, die der wirtschaftende Mensch den Gütern angedeihen läfst, bezieht sich stets auf bestimmte Mengen derselben, und die Gütermengen, die dem Menschen zur Verfügung stehen, beeinflussen die Wertschätzung. Menger führt aus, wie ein isoliert wirtschaftender Mensch dem einzigen Sack Korn, den er hat, eine ungemein grofse Bedeutung beilegt, weil von seinem Besitz die Erhaltung des Lebens abhängt. Einem zweiten Sack legt er schon weit weniger Bedeutung bei, weil dieser nicht mehr nötig ist, um sein Leben zu fristen, sondern nur zu reichlicherer Nahrung dient. Noch geringer ist der Wert des dritten Sackes, den er vielleicht zur Aussaat verwendet. Mit einem zehnten Sack weifs unser Robinson vielleicht nichts besseres anzufangen, als Papageien zu füttern, die ihm in müfsigen Stunden die Langeweile vertreiben sollen. Der Nutzen, den der letzte zur Verfügung stehende Teil des Vorrats für unseren Menschen hat, ist der Grenznutzen des in Rede stehenden Gutes. Nach diesem Grenznutzen bemifst sich der Wert, den eine Mafseinheit des Gutes für das betreffende Subjekt hat. Da die verschiedenen Kornsäcke für unseren Mann fungible Dinge sind, so legt er den nach dem Grenznutzen eines Sackes Korn bemessenen Wert nicht

nur dem Sack Nr. 10, sondern jedem seiner Säcke bei; denn die Entbehrung, die er bei Verlust irgend eines Sackes erleidet, ist nicht gröfser als die Entsagung, die es kostet, auf die Fütterung der Papageien zu verzichten; der Grund liegt darin, dafs es wohl niemand einfallen wird, zu hungern, aber immer noch Vögel zu füttern, sondern dafs jeder die Vögel fliegen lassen wird, um den geminderten Vorrat nur noch für diejenigen Zwecke zu verwenden, die ihm am wichtigsten scheinen. Ganz ähnliche Betrachtungen wie diese, die aus Mengers Gedankenkreis entnommen ist[1], finden sich bei Jevons, und auch Walras geht von analogen Vorstellungen aus.

Der Hauptgedanke dieser Grenznutzentheorien ist also der, dafs der Wert einer bestimmten Teilquantität eines Gutes um so geringer ist, je mehr Teilmengen zur Verfügung stehen, oder m. a. W.: dafs der Wert einer neu hinzutretenden Einheit geringer ist als der Wert der letzten schon im Besitz des betrachteten Subjekts befindlichen Einheit, oder: dafs der Wert einer neu hinzutretenden Einheit sich als eine abnehmende Funktion der Anzahl der besessenen Einheiten darstellt.

Diese Anschauung ist, wie oben schon berührt, nicht ganz neu, sondern sie wurde schon früher von verschiedenen Gelehrten mehr oder weniger deutlich entwickelt. Wohl einer der ersten dieser Gelehrten war Daniel Bernoulli; mindestens ist er der erste uns bekannte Autor, der sich der Tragweite dieser Anschauung bewufst war. Die kleine Abhandlung, in welcher Daniel Bernoulli die Grundzüge seiner Ansicht über den Wert niedergelegt hat, tritt auf den folgenden Blättern zum ersten Male in deutscher Sprache vor das Publikum.

Biographische Angaben über den Autor, die gewöhn-

---

[1] Übrigens finden sich ganz ähnliche Ausführungen schon bei Thompson: An inquiry into the principles of the distribution of wealth. (1824.) 3. Aufl. 1869. S. 57 ff.

lich einen Hauptteil in Einleitungen zu Neuausgaben alter Schriften bilden, sind hier wohl unnötig, da die Hauptverdienste unseres Autors nicht auf volkswirtschaftlichem Gebiete liegen, und da er überdies durchaus nicht etwa eine unbekannte Gröſse ist, die man dem Publikum erst vorstellen müſste. Es sei nur erwähnt, daſs Daniel Bernoulli im Jahre 1700 in Gröningen als Sohn des Professors der Mathematik Johann Bernoulli geboren wurde. Er gehörte somit der berühmten Gelehrtenfamilie an, welcher durch mehr als zwei Jahrhunderte eine ununterbrochene Reihe der hervorragendsten Forscher entstammte. 1725 wurde Daniel Bernoulli Professor in Petersburg, 1733 Professor in Basel, zunächst für Anatomie und Botanik, später auch für Physik; er starb 1782, nachdem er schon einige Zeit vorher dem öffentlichen Lehramt entsagt hatte. Die uns hier interessierende Abhandlung wurde in der Zeit, als Bernoulli in Petersburg war, verfaſst und zwar im Jahre 1730 oder (wahrscheinlicher) 1731; herausgegeben wurde sie im Jahre 1738 von der Petersburger Akademie der Wissenschaften [1] unter dem Titel: „Specimen theoriae novae de mensura sortis, auctore Daniele Bernoulli.

Wie man aus dem Schriftchen selbst sieht, waren es nicht eigentlich nationalökonomische Fragen, die unseren Denker zu einer Untersuchung über das Wertproblem veranlaſsten, sondern Fragen aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In diesem Zweige der Mathematik wurde damals wie auch heute oftmals die Aufgabe gestellt, den Wert der Gewinnaussichten zu berechnen, die sich für die verschiedenen Teilnehmer eines Spieles ergeben. Bernoulli kann sich mit der Art, wie man solche Aufgaben zu lösen pflegte, nicht einverstanden erklären, da alle Lösungen von der Voraussetzung

---

[1] Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. Tomus V. Petrop. 1738. S. 175—192.

ausgingen, daſs der Wert der Gewinn-Aussicht für alle Spieler derselbe sei, sofern nur die objektiven Bedingungen des Spiels für jeden Spieler die gleichen sind. Bernoulli behauptet, daſs die gleich berechtigte Hoffnung auf gleichen Gewinn für die verschiedenen Personen in sehr verschiedenem Grade wertvoll sei, je nach den Vermögensumständen, in denen sich diese Personen befinden; denn *der Wert eines Vermögenszuwachses für eine Person sei um so geringer, je gröſser das Stammvermögen dieses Subjekts ist.* Diesen Gedanken kann man wohl als den Kernpunkt der vorliegenden Abhandlung ansehen. Es ist hier im wesentlichen das ausgesprochen, was wir oben als den Hauptsatz der Grenznutzentheorien bezeichneten. Bernoullis Gefühl empört sich dagegen, den Wert als etwas in den Gütern selbst liegendes zu betrachten; er sieht, daſs die gleiche Geldsumme für die Bedürfnisbefriedigung der verschiedenen Menschen eine sehr verschiedene Bedeutung haben kann, je nach der Wichtigkeit der Bedürfnisse, die noch ihrer Befriedigung harren; er sieht, daſs für einen reichen Mann, für dessen unmittelbarste Lebensbedürfnisse bereits gesorgt ist, eine Geldsumme verhältnismäſsig wenig Wert haben kann, die für einen Armen, der darben muſs, von ungemein groſser Bedeutung ist.

Daſs Bernoulli nicht, wie Gossen, Jevons, Menger, Walras und ihre Nachfolger, den Versuch unternommen hat, von seinem Standpunkt aus eine Analyse der gesamten Volkswirtschaft, insbesondere des Tausches und der Produktion zu geben, kann uns bei dem damaligen Stande der Volkswirtschaftslehre nicht wundern. Überhaupt beschränkt sich unser Autor auf eine Betrachtung des Wertes des Geldes in seinem Verhältnis zum gesamten Vermögensbestande, und diesen Vermögensbestand betrachtet er gleichfalls nicht als eine Summe konkreter

Güter, sondern nach seinem Geldwert. Seinen Hauptgedanken, dafs der Vermögenszuwachs um so geringer geschätzt wird, je gröfser das vorher vorhandene Vermögen schon war, spricht Bernoulli aus, ohne eine Begründung zu versuchen; er geht auch nicht darauf ein, zu fragen, ob diese Wertregel für jede Art von Gütern, oder nur für das Geld, für das allein er sie formuliert, gilt. Man kann nicht leugnen, dafs diese Beschränkung der Betrachtung auf den Geldwert ihre Vorzüge hat; denn es konnte unserem Autor nicht darauf ankommen, ein System der Nationalökonomie zu schreiben, sondern es lag ihm nur daran, einen guten Gedanken, den er für eine Bereicherung der Wissenschaft in alle Zukunft hinaus hielt, niederzulegen und anschaulich zu machen. Freilich sagt Walras, dafs das Dazwischentreten des Geldes, so sehr es den Tauschverkehr in der Praxis erleichtere, die Theorie des Tausches schwerer verständlich mache, und dafs es deshalb für eine wissenschaftliche Untersuchung geraten sei, vom Naturaltausch auszugehen[1]; es mag sein, dafs diese Behauptung für eine gründliche, elementare Analyse, wie sie Walras so meisterhaft führt, ihre Richtigkeit hat; für die Betrachtung Bernoullis dagegen, die nur den Zweck hat, einen kühnen Gedankenblitz nicht verloren gehen zu lassen, erscheint mir gerade die von ihm gewählte Beschränkung auf den Geldwert sehr angebracht, und es scheint mir, als ob auf diese Weise der Grundgedanke leichter in seiner Wichtigkeit anschaulich gemacht werden könne als durch die gar nicht so unähnlichen und ohne Zweifel noch gründlicheren Betrachtungen, von denen Walras ausgeht. Dafs für einen isoliert wirtschaftenden Menschen der zehnte Sack Korn nicht so viel wert ist wie der einzige erste, ist allerdings richtig, und ist auch nicht gerade

[1] Théorie math. de la rich. soc. S. 13.

schwer einzusehen, aber für uns, die wir von Jugend auf in einem entwickelten Tauschverkehr stehen, sind solche Sätze doch einigermafsen ungewohnt und nicht ohne weiteres einleuchtend; dagegen ist Bernoullis Satz von dem mit der Gröfse des Besitzes abnehmenden Wert des neu hinzutretenden Geldes unmittelbar anschaulich, weshalb unser Autor ohne Zweifel berechtigt war, sich auf die tägliche Erfahrung zu berufen, ohne sich auf einen strengen Beweis seiner grundlegenden Behauptung einzulassen.

Ein solcher Beweis läfst sich wohl gar nicht führen, ohne auf die einzelnen Güter zurückzugreifen, in der Weise, wie Gossen und die späteren Theoretiker dies wirklich gethan haben, indem sie zeigten, dafs jedes wirtschaftende Subjekt die ihm zur Verfügung stehenden Mittel auf die Beschaffung der verschiedenen Güter, deren es bedarf, so verteilt, dafs bei allen Gütern der Grenznutzen auf den gleichen Betrag herabsinkt[1]; weil aber der Grenznutzen eines jedes einzelnen Gutes fortwährend fällt, so sinkt auch die Summe dieser Grenznutzen, welche selbst den Grenznutzen des ganzen Ver-

---

[1] Dieser Satz wird merkwürdigerweise häufig so ausgesprochen, als ob er nur für vernünftig wirtschaftende Subjekte Geltung habe. Dafs dies Gesetz in diesem Falle ziemlich bedeutungslos wäre, ist klar; denn ein Gesetz, das nur auf „vernünftige“ Menschen Anwendung findet, spielt in der Volkswirtschaft sicherlich keine grofse Rolle. Überdies müfste man immer erst wissen, was sich jeder Schriftsteller eigentlich unter einem vernünftigen Menschen vorstellt. Natürlich kann kein Zweifel sein, dafs ein vernünftiger Mensch seine Mittel in anderer Weise zur Beschaffung von Gütern verwendet wie ein unvernünftiger; denn er hat eine andere Rangordnung der Bedürfnisse; aber als sicher müssen wir annehmen, dafs jeder Mensch seine Mittel so einteilt, dafs der Grenznutzen aller Güter, die er sich verschafft, gleich ist.

mögens als Einheit aufgefaſst darstellt. So kommt man auf einem Umweg zu dem Satze, den Bernoulli als einen unmittelbar klaren ausspricht, zu dem Satze nämlich, daſs der Wert eines Vermögenszuwachses eine abnehmende Funktion des schon vorhandenen Vermögens ist.

Bernoulli, der sich, wie gesagt, auf der einen Seite eine gewisse Beschränkung auferlegt, indem er bei seiner Betrachtung sich nur auf den Wert des Geldes, als des Repräsentanten des Vermögens im allgemeinen, bezieht, setzt uns auf der anderen Seite einigermaſsen in Erstaunen durch die Kühnheit, mit der er versucht, das Wertproblem der mathematischen Behandlung zugänglich zu machen. Er begnügt sich nämlich nicht mit der Behauptung, daſs der Wert des Vermögenszuwachses eine abnehmende Funktion des Stammvermögens ist, sondern er spricht den Satz aus, daſs der Wert dieses Zuwachses (sofern der Zuwachs als unendlich klein vorgestellt wird) der Gröſse des vorher vorhandenen Vermögens umgekehrt proportional sei. Aus dieser Annahme ergiebt sich für den Wert dieser Vermögenszunahme die Gleichung einer logarithmischen Kurve (§ 10). In der Annahme Bernoullis, daſs der Wert des Zuwachses dem Betrage des Stammvermögens genau umgekehrt proportional sei, liegt ohne Zweifel viel willkürliches; denn ihre Richtigkeit wird uns nicht bewiesen; ja, sie ist vielleicht unbeweisbar. Aber auch, wenn diese Hypothese stets unbewiesen bleiben sollte, und selbst wenn sie falsch wäre, so können wir der Kühnheit, mit der Bernoulli sie aufgestellt hat, unsere Anerkennung nicht versagen, und es ist vielleicht nicht ganz angezeigt, sie mit souveräner Verachtung von der Hand zu weisen, wenn man erwägt, daſs in neuerer Zeit durch die Versuche E. H. Webers, Fechners und anderer Forscher auf verschiedenen Gebieten unseres Empfindungslebens Gesetzmäſsigkeiten entdeckt worden sind, die dem Bernoullischen Wertgesetz durchaus ent-

sprechen. Zudem unterliegt es wohl keinem Zweifel, daſs Bernoullis logarithmische Kurve der Wahrheit bedeutend näher kommt, als die geraden Linien, mit denen Gossen sich zu behelfen suchte, und vielleicht ist Bernoullis Kurve für manche Zwecke auch brauchbarer als die ganz unbestimmten Kurven, deren sich Jevons und Walras bedienen[1].

In einer Beziehung müssen wir vom Standpunkte der modernen Werttheorie aus, den Erörterungen unseres Autors die Zustimmung versagen, und zwar nicht etwa deshalb, weil die Grundgedanken, von denen er ausgeht, zu anderen Schlüssen führen, als die Lehren, auf welche sich die neueren Werttheoretiker stützen, sondern, weil Bernoulli selbst die Schlüsse aus seiner eigenen Theorie nicht mit genügender Schärfe gezogen hat, da er noch einigermaſsen in den alten Anschauungen befangen war.

In § 6 wird nämlich der Fall besprochen, daſs jemand 100 000 Dukaten besitze und aus diesem Vermögen ein jährliches Einkommen von 5000 Dukaten beziehe; ein Anderer besitzt halb so viel Vermögen und bezieht daraus ein halb so groſses Einkommen. Bernoulli behauptet, daſs unter solchen Umständen für den ersten Menschen ein Dukat so viel wert sei wie ein halber Dukat für den zweiten. Offenbar ist dieser Schluſs nicht zulässig; denn es tritt darin die Auffassung zu Tage, als ob der Wert etwas sei, das unabhängig von dem Subjekt, das die Wertschätzung vornimmt, gedacht werden könne. Wenn Bernoullis Behauptungen über den Wert des ganzen und des halben Dukaten wirklich eine zulässige Schluſsfolgerung aus seiner Theorie wäre, so würde diese ganze Theorie

---

[1] Aus §§ 7 ff. geht mit genügender Deutlichkeit hervor, daſs die Bernoullischen Gleichungen und Kurven nicht genau dieselbe Bedeutung haben wie die der neueren Theoretiker; genauer auf diesen Punkt einzugehen, würde hier zu weit führen.

hinfällig durch die folgende Einwendung, die er selbst macht. Er sagt, es sei aus der täglichen Erfahrung bekannt, dafs es reiche Leute giebt, die sich um einen einzigen Dukaten mehr absorgen als andere ärmere, jedoch freigebigere Leute um mehrere Dukaten („Sunt, quibus unus ducatus magis cordi est, quam sunt plures ducati homini minus diviti magis autem generoso"). Dieser unstreitig richtig beobachteten Thatsache ist aber kein Einwand gegen Bernoullis Theorie zu entnehmen, und zwar nicht etwa, wie er selbst zu meinen scheint, deshalb, weil solche Fälle so selten sind, dafs man sie bei Aufstellung einer allgemeinen Regel vernachlässigen dürfte, sondern deshalb, weil diese Fälle, auch wenn sie noch so häufig wären, sein Wertgesetz nicht umstofsen. Seine Hypothese sagt nichts weiter, als dafs der Wert eines jeden beliebig kleinen Gewinns dem schon vorhandenen Vermögen umgekehrt proportional sei („valde probabile est lucrulum quodvis semper emolumentum afferre summae bonorum reciproce proportionale" § 5). Dieser Satz kann für einen armen Verschwender ebensogut gelten wie für einen reichen Geizhals; denn er behauptet durchaus nicht, dafs für verschiedene Menschen, die ein gleich grofses Vermögen besitzen, ein gleicher Vermögenszuwachs gleich viel wert sei. Über die Wahrheit dieser letzteren Behauptung läfst sich eigentlich gar nichts sagen; denn um eine solche Behauptung aufstellen zu können, müfste man voraussetzen, dafs alle Menschen vollkommen gleich geartet wären, oder dafs sie sich wenigstens in Beurteilung ihrer wirtschaftlichen Angelegenheiten von denselben Grundsätzen leiten liefsen; von solchen Voraussetzungen, die natürlich ganz unbrauchbar wären, ist Bernoulli nirgends ausgegangen, wenn auch vielleicht nicht bestritten werden kann, dafs ihm an der angezogenen Stelle etwas ähnliches vorgeschwebt haben mag. Dafs für den Besitzer von 100000 Dukaten ein Dukat gerade so viel

wert ist, wie für den Besitzer von 50 000 Dukaten ein halber, folgt also aus Bernoullis Wertgesetz nur dann, wenn man sich unter den beiden Leuten gewisse „Normalmenschen“ vorstellt, eine Vorstellung, die durch nichts gerechtfertigt ist. Aus Bernoullis Gesetz folgt nur, dafs für jeden, also sowohl für den Besitzer der 50 000 Dukaten als auch für den der 100 000 die Wertschätzung des letzten Dukaten in einem gewissen Verhältnis steht zur Wertschätzung des vorletzten, oder aller anderen in seinem Besitz befindlichen oder von ihm erhofften; und dies gilt auch für einen geizigen Millionär, der sich nicht entschliefsen kann, eine Mark für das Mittagessen auszugeben ebenso gut wie für einen Habenichts, der soeben 2 Mark gefunden hat und die Hälfte davon ohne Bedenken verschenkt. Auch das in § 5 angeführte Beispiel von dem Gefangenen steht mit der Hypothese nicht in Widerspruch.

Wenn man sieht, dafs unser Autor nicht genügend von der Anschauung durchdrungen war, dafs es durchaus nicht angängig ist, zu sagen, ein Gut sei für den einen Menschen mehr wert als für den anderen, sondern dafs es immer nur angeht, zu fragen: welches Gut hat für unser Subjekt mehr Wert? oder: wie verhält sich für dieses Subjekt der Wert des Gutes a zu dem Wert des Gutes b? wenn man also sieht, dafs Bernoulli sich die Grundlagen, von denen aus seine Theorie verstanden werden mufs, nicht genügend klar gemacht hat, so könnte man Bedenken tragen, ihm in seinen weiteren Erörterungen zu folgen. Aber in wahrhaft genialer Weise scheint er zu fühlen, dafs die alte Anschauungsweise, die ihm gelegentlich noch anhängt, unbrauchbar ist; er wendet sich deshalb von ihr ab, wenn auch ohne sie ausdrücklich für verfehlt zu erklären, und beschäftigt sich im übrigen Teile seines Schriftchens nur noch mit der Wertschätzung, soweit sie von einzelnen Subjekten ausgeht, und begiebt sich damit auf den Boden, auf dem

allein seine Theorie die Wissenschaft fördern konnte. (Quia vero nos deinceps considerabimus unum eundemque hominem, nihil id ad nos attinebit.)

Die mathematischen Betrachtungen, die in den §§ 7 bis 12 angestellt werden, sind richtig, sofern man sich auf den Boden des zu Grunde gelegten Wertgesetzes stellt. Unter dieser Voraussetzung gelten die dort niedergelegten Formeln nicht nur, wie Bernoulli zu meinen scheint (§ 6 a. E.), für Normalmenschen, sondern ebensowohl für einen knauserigen Reichen wie für einen freigebigen Armen. Diese Betrachtungen beschäftigen sich ausschliefslich damit, die Wertschätzungen, die ein einzelnes Subjekt verschiedenen Gütermengen angedeihen läfst, zu messen, und sie greifen nirgends über dies Gebiet hinaus. Wenn wir z. B. die Formel des § 12 auf den in § 6 besprochenen Fall von den beiden Menschen, von denen der eine 100 000 und der andere 50 000 Dukaten Vermögen hat, anwenden, so erhalten wir für den Wert (y_1), den der erste dieser Leute einem Dukaten beilegt: $y_1 = b_1 \log \frac{100\,001}{100\,000}$; für den zweiten finden wir, dafs er einem halben Dukaten folgenden Wert beilegt: $y_2 = b_2 \log \frac{50\,000{,}5}{50\,000} = b_2 \log \frac{100\,001}{100\,000}$. Wenn nun angenommen wird $b_1 = b_2$; d. h. wenn wir annehmen, dafs die beiden Menschen genau dieselben psychologischen Eigentümlichkeiten hätten, dann würde der Fall eintreten, den Bernoulli als den normalen ansieht; dann würde $y_1 = y_2$, d. h. es würde dann für den ersten unserer Menschen ein Dukat genau so viel wert sein, wie für den zweiten ein halber; aber diese Annahme ist rein willkürlich.

Obwohl die originellen Gedanken, die Bernoulli über das Wertproblem in der jetzt neu herausgegebenen Abhandlung niedergelegt hatte, weder von ihm selbst noch von anderen Gelehrten in einer für die Nationalökonomie

wahrhaft fruchtbaren Weise ausgebeutet wurden, und obwohl die Umwälzung der Wertlehre, die seit dem Erscheinen dieses Schriftchens noch weit länger als ein Jahrhundert auf sich warten liefs, wohl kaum direkt und vielleicht auch nicht einmal indirekt an Bernoulli anknüpft, so blieb seine Hypothese doch nicht unbeachtet.

Vor allem ist hier Laplace zu nennen, der sich in seiner 1812 veröffentlichten Théorie analytique des probabilités ganz auf den Boden des Bernoullischen Gedankenganges stellt. Er bezeichnet, wie herkömmlich, das Produkt aus dem erhofften Gewinn in die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Gewinn eintritt, als mathematische Hoffnung und unterscheidet davon die moralische Hoffnung, von der er sagt, dafs sie gleichfalls abhängig sei von der Gröfse des erhofften Vermögenszuwachses und der Wahrscheinlichkeit, mit der uns dieser Zuwachs zu Teil wird, dafs sich aber aufserdem diese moralische Hoffnung nach tausend verschiedenen Umständen regele, welche fast niemals einer Definition und noch schwieriger einer Berechnung unterworfen werden könnten. Man könne diese moralische Hoffnung auch definieren als das Produkt aus dem Wert des Gewinnes in die Wahrscheinlichkeit, mit der der Gewinn eintritt; nur müsse man unter Wert des Gewinnes dabei nicht den absoluten sondern den relativen Wert verstehen. Um diesen relativen Wert zu schätzen, sei es naheliegend, anzunehmen, dafs der relative Wert eines unendlich kleinen Vermögenszuwachses dem absoluten Wert dieses Zuwachses direkt und dem Gesamtvermögen der betreffenden Person umgekehrt proportional ist[1]. Hier ist also dieselbe Annahme gemacht wie von Bernoulli. An einer anderen Stelle desselben Werkes führt Laplace die Ausdrücke fortune physique und fortune morale in die Wissenschaft ein, die seitdem

[1] Oeuvres de Laplace, Bd. VII. Paris 1847. S. 204 ff.

das Bürgerrecht erworben haben. Er bezeichnet als fortune physique eines Menschen die in seinem Besitz befindliche Gütersumme, als fortune morale den Wert dieser Güter für das besitzende Subjekt. Entsprechend dem Zuwachs, den die fortune physique einer Person erhält, gewinnt Laplace für den zugehörigen Zuwachs an fortune morale den Ausdruck: $\frac{k\,dx}{x}$, welche Formel mit derjenigen Bernoullis übereinstimmt[1]. In dem vier Jahre später herausgegebenen Essai philosophique sur les probabilités wiederholt Laplace diese Betrachtungen über moralische Hoffnung und relativen Wert und beruft sich diesmal ausdrücklich auf Daniel Bernoulli.[2]

Poisson stimmt völlig mit Laplace überein; er berechnet für den moralischen Wert eines Vermögenszuwachses den uns bekannten Ausdruck, den er als „Bernoullische Grundformel" bezeichnet und führt für verschiedene Beispiele diesbezügliche Rechnungen durch.[3]

Auch spätere Mathematiker haben sich eingehend mit Bernoullis Abhandlung beschäftigt[4].

Wohl der erste Nationalökonom, der auf die Bedeutung der Hypothesen Bernoullis aufmerksam machte, war Hermann. Er scheint diese Hypothese nicht aus der Originalabhandlung, sondern nur aus der Anführung im Essai des Laplace zu kennen. Hermann lehrt wie Bernoulli, dafs der Wert eines Gutes um so kleiner ist, je gröfser das Vermögen der die Schätzung vornehmenden

---

[1] Laplace, Bd. VII, S. 474 ff.

[2] Essai, S. 30 f. der deutschen Übersetzung von Tönnies, herausgegeben von Langsdorf. Heidelberg 1819.

[3] Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung; deutsche Ausgabe von Schnuse. Braunschweig 1841. § 24 und Anhang II.

[4] Cf. besonders Lacroix: Traité élémentaire du calcul des probabilités. 4. Aufl. Paris 1864. S. 116—133.

Person ist; ja, er pflichtet sogar der Annahme bei, daſs der Wert dem Stammvermögen umgekehrt proportional sei[1].

Fechner widmet unserem Problem eine kurze Betrachtung; er behandelt Bernoullis Hypothese als einen Specialfall des von ihm so genannten Weberschen Gesetzes, welches sich allgemein so aussprechen läſst: „Ein positiver oder negativer Zuwachs zum einen oder anderen Reize giebt immer denselben Empfindungszuwachs, wenn sein Verhältnis zum Reize, dem er zuwächst, dasselbe bleibt, wie sich auch seine absolute Gröſse ändert“. Indem nun Fechner das physische Vermögen als den Reiz und den Wert dieses Vermögens als die Empfindung auffaſst, spricht er Bernoullis Wertgesetz in folgenden Worten aus: „Um einen gleichen Zuwachs zu dem, was Laplace die fortune morale nennt, zu gewähren, muſs der Zuwachs zu der fortune physique im Verhältnisse dieser fortune physique stehen“. Auch Fechners psychophysische Grundformel: $d\gamma = \frac{k\, d\beta}{\beta}$ und seine Maſsformel: $\gamma = k \log \frac{\beta}{b}$ stimmen mit den von Bernoulli entwickelten Wertformeln überein[2].

Groſse Bedeutung maſs Friedrich Albert Lange dem Wertgesetz Bernoullis bei. Nachdem er die Bernoullische Hypothese formuliert hat, fährt er fort: „Dieser zuerst von Bernoulli aufgestellte Satz wurde von Laplace weiter entwickelt und erschien seitdem häufig in den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ohne daſs man die ungeheure Bedeutung ahnte, welche er nunmehr durch die

---

[1] Staatswirtschaftliche Untersuchungen. München 1832. S. 73. In dem Beispiel, das dort beigebracht wird, entfernt sich Hermann allerdings wieder von Bernoulli; doch würde es zu weit führen, hierauf näher einzugehen.

[2] Fechner, Elemente der Psychophysik. Leipzig 1860. I, S. 236; II, S. 10 ff.

Forschungen von E. H. Weber und Fechner erhalten hat". „Es ist kaum zu bezweifeln, dafs dies Gesetz auf einen grofsen Teil der socialen und politischen Phänomene verschiedenster Art Anwendung findet, wie denn schon die blofse unbewiesene Annahme seiner Gültigkeit auf eine ganze Reihe eigentümlicher Erscheinungen des Völkerlebens ein überraschendes Licht wirft". Nachdem Lange ein Beispiel gegeben hat, fährt er fort: „Es genügt, hier gezeigt zu haben, dafs die mathematische Grundlage der Theorie des Glücks, welche uns die Bernoullische Formel an die Hand giebt, keineswegs vereinzelt in der Luft steht, sondern beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaften als einer der sichersten und bestbegründeten Punkte in diesem ganzen Gebiete der Forschung zu betrachten ist"[1].

Unter den englischen Nationalökonomen war Jevons wohl der erste, der auf Bernoullis Betrachtungen aufmerksam machte, die er aber erst kennen gelernt zu haben scheint, nachdem er seine eigenen Gedanken schon selbstständig entwickelt hatte; man kann also nicht sagen, dafs Jevons durch unseren Autor wesentliche Anregung empfangen hätte. Überdies hat er die Bedeutung des Bernoullischen Schriftchens, das ihm im Original offenbar unbekannt war, entschieden unterschätzt.

Es sei gestattet, zum Schlufs noch einige Worte über die vorliegende Neuausgabe hinzuzufügen. Herr Professor A. Pringsheim in München hatte die Freundlichkeit, Bernoullis Abhandlung zu übersetzen und einige Anmerkungen auszuarbeiten, die das Verständnis der mathematischen Teile der Erörterungen erleichtern sollen.

Vielleicht kann es sonderbar erscheinen, dafs die Erörterungen über das sogenannte Petersburger Problem in diese Ausgabe aufgenommen sind, da sie für den national-

[1] Die Arbeiterfrage, 3. Aufl. Winterthur 1875. S. 113 ff.

ökonomischen Leser keine direkte Bedeutung haben; dennoch schien es nicht angezeigt, die Abhandlung unvollständig wiederzugeben, besonders da gerade dieses Problem, wie Bernoulli selbst ausdrücklich bemerkt (cf. S. 46), den eigentlichen Anstofs zur Aufstellung seiner Wert-Theorie gegeben hat und andererseits in der reichen Litteratur, die sich mit dem Petersburger Problem befafst, Bernoullis Ansichten über den Wert öfters besprochen worden sind. Dafs die Lösung, die unser Denker für das fragliche Problem aufstellt, den Kern der Sache offenbar nicht trifft, ist neuerdings wohl selten oder nie bezweifelt worden[1], und wird von Herrn Pringsheim in einer Anmerkung ausführlich begründet.

Ludwig Fick.

[1] cf. Bortkewitsch in Conrads Jahrbüchern; Jahrg. 1895, S. 337.

VERSUCH

einer neuen Theorie

der

Wertbestimmung von Glücksfällen

von

Daniel Bernoulli,

übersetzt und durch Anmerkungen erläutert

von

Alfred Pringsheim.

§ 1.

Seit die Mathematiker angefangen haben, sich mit der Wertbestimmung von Glücksfällen zu beschäftigen, wurde von ihnen behauptet: Man erhalte den Wert einer Gewinnhoffnung, wenn man die Werte der einzelnen möglichen Gewinne mit der Zahl der Fälle multipliziere, in denen sie eintreten können, und das Aggregat dieser Produkte durch die Zahl aller möglichen Fälle dividiere[1]; dabei wird vorausgesetzt, dafs

---

[1] Man pflegt das Resultat dieser Operation als den Wert der mathematischen Hoffnung — zum Unterschiede von der später zu betrachtenden moralischen — zu bezeichnen.

Bedeutet $a_1, a_2, \cdots a_n$ die Anzahl der Fälle, in denen beziehungsweise die Gewinne $g_1, g_2, \cdots g_n$ eintreten, so bestimmt sich nach dem im Texte gesagten der Wert h der mathematischen Hoffnung durch die Formel:

$$h = \frac{a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

oder wenn man setzt:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s,$$

wo also s die Anzahl aller überhaupt möglichen Fälle bedeutet:

$$h = \frac{a_1}{s} g_1 + \frac{a_2}{s} \cdot g_2 + \cdots + \frac{a_n}{s} \cdot g_n.$$

die betrachteten Fälle als gleich möglich erscheinen. Acceptiert man diese Regel, so läuft die

---

Da nun allgemein der Ausdruck $\frac{a_k}{s}$ (für k = 1, 2, $\cdots$ n), d. h. die Anzahl derjenigen Fälle, welche den Gewinn g_k zur Folge haben, dividiert durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Fälle, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Gewinnes g_k darstellt, so kann man den Wert der mathematischen Hoffnung etwas kürzer folgendermafsen definieren: Der Wert der mathematischen Hoffnung ist das Aggregat aus den Produkten der einzelnen möglichen Gewinne in die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Hierbei werden etwaige Verluste als „negative" Gewinne in Anrechnung gebracht.

Bei einem nach den Regeln der Billigkeit eingerichteten Glücksspiele müssen die mathematischen Hoffnungen der beiden Gegner einander gleich sein, bezw. der von dem einen Spieler zu leistende Einsatz mufs genau gleich seiner mathematischen Hoffnung sein. Wenn z. B. A und B ein Würfelspiel vereinbaren, bei dem A bei sechs Würfen mit einem Würfel jedesmal soviel Mark erhalten soll, als er Augen wirft, so ist nach den obigen Formeln seine mathematische Hoffnung:

$$h = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 1\cdot 5 + 1\cdot 6}{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = 3^1/_2,$$

d. h. er hätte, wenn das Spiel gerecht sein soll, an B einen Einsatz von $3^1/_2$ Mark zu zahlen.

Soll A jedesmal das Doppelte der geworfenen Augen in Mark erhalten, so oft er eine ungerade Zahl wirft, dagegen 6 Mark an B zahlen, falls er eine gerade Zahl wirft, so wird:

$$h = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 6 + 1\cdot 10 - 3\cdot 6}{1 + 1 + 1 + 3}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 6 + \frac{1}{6}\cdot 10 - \frac{3}{6}\cdot 6 = 0,$$

so dafs also das Spiel den Regeln der Billigkeit entspricht, ohne dafs A einen weiteren Ersatz zu leisten hat.

weitere Ausbildung dieser Methode offenbar lediglich darauf hinaus, alle überhaupt denkbaren Fälle aufzuzählen, sie alsdann in solche von gleicher Möglichkeit zu sondern und demgemäfs in Klassen einzureihen.

§ 2.

Die zahlreichen Beweise, welche man für diese Regel gegeben hat, beruhen bei genauerer Prüfung durchweg auf der folgenden Hypothese: Wenn zwei Personen irgend etwas erhoffen, so sei keinerlei Grund vorhanden, warum die eine vor der anderen bevorzugt werden solle, und daher seien die Chancen beider als gleich zu erachten; die persönlichen Verhältnisse des Einzelnen seien hierbei belanglos, und es komme nur auf diejenigen an, von denen das Eintreten des erhofften Ereignisses abhängt.

Ein derartiges Urteil mögen vielleicht öffentliche Richter fällen: hier handelt es sich aber nicht darum, Rechtsurteile zu fällen, sondern Ratschläge zu geben, nämlich Regeln, vermöge deren jeder im stande ist, einen Glücksfall je nach seinen besonderen Vermögensverhältnissen abzuschätzen.

§ 3.

Um die Richtigkeit dieser Bemerkung zu zeigen, wollen wir annehmen, einem armen Teufel sei ein Los zugefallen, durch welches er mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder nichts oder 20000 Dukaten gewinnen kann. Wird nun dieser den Wert jenes Loses auf 10000 Dukaten zu schätzen haben, und würde er thöricht handeln, wenn er dasselbe für 9000 Dukaten verkaufte? Mir scheint das nicht der Fall, obschon ich andererseits meine, dafs ein sehr reicher Mann seinen Vorteil verkennen

würde, wenn er es eventuell ablehnte, jenes Los für den obigen Preis zu erwerben. Wenn ich aber in diesem Falle recht habe, so erscheint es offenbar unmöglich, den Wert eines Glücksfalles in der Weise abzuschätzen, dafs diese Wertbestimmung für alle Menschen pafst, und daraus folgt zunächst, dafs die Regel des § 1 zu verwerfen ist. Dagegen kann, wie bei genauerer Überlegung jedermann einsehen wird, der in jener Regel gebrauchte Ausdruck Wert so definiert werden, dafs dadurch die ganze Regel ohne Bedenken für alle Welt annehmbar wird: es ist hier nämlich der Wert einer Sache nicht aus ihrem blofsen Preise (Geld- oder Tauschwert) zu bestimmen, sondern aus dem Vorteil, den jeder einzelne daraus zieht. Der Preis (Geld- oder Tauschwert) bestimmt sich aus der Sache selbst und ist für alle gleich; der Vorteil aber hängt von den Verhältnissen des Einzelnen ab. So mufs es zweifellos für einen Armen mehr wert sein, tausend Dukaten zu gewinnen, als für einen Reichen, obschon der Geldwert für beide der gleiche ist.

§ 4.

Hiermit ist die Sache schon so weit geführt, dafs ein jeder lediglich durch Abänderung jenes einen Ausdrucks alles weitere selbst finden könnte: da aber meine Hypothese neu ist, so wird sie doch noch einiger Erläuterungen bedürfen. Ich will daher versuchen, auseinanderzusetzen, wie ich mir die Sache zurecht gelegt habe; dabei soll uns der folgende Satz als Grundregel dienen: Multipliziert man die einzelnen möglich erscheinenden **Vorteile** mit der Anzahl der Fälle, in denen sie eintreten können und dividiert das Aggregat dieser Produkte durch die Anzahl aller möglichen Fälle, so erhält man einen **mittleren Vorteil**, und der diesem **Vorteil** entsprechende Ge-

winn stellt das Wertmafs für den fraglichen Glücksfall dar[2].

§ 5.

Auf diese Weise ergiebt sich nun aber, dafs man den Wert eines Glücksfalles nicht bestimmen kann, wenn nicht zugleich der Vorteil bekannt ist, der einem jeden aus irgend einem Gewinne erwächst, und auch umgekehrt der Gewinn angegeben werden kann, welcher zur Erzeugung eines bestimmten Vorteils für ihn erforderlich wäre — Dinge, über die sich kaum etwas sicheres aussagen läfst, da sie von zu verschiedenartigen Umständen abhängen können. So wird z. B. in den meisten Fällen einem Armen durch den gleichen Gewinn mehr gedient, als einem Reichen; nichtsdestoweniger könnte für einen Gefangenen, der 2000 Dukaten besitzt, aber noch einmal soviel zur Wiedererlangung der Freiheit bedarf, ein Gewinn von 2000 Dukaten mehr wert sein, als für einen minder begüterten. Immerhin sind Beispiele dieser Art, obschon man deren unzählige konstruieren könnte, in Wirklichkeit selten. Wir werden uns also nur mit solchen Fällen beschäftigen, wie sie gewöhnlich vorkommen; dabei wollen wir des leichteren Verständnisses halber annehmen, dafs das Vermögen eines Menschen immer nur durch successives Hinzutreten unendlich kleiner Incremente stetig sich vermehre. Alsdann erscheint es aber in hohem Grade wahrscheinlich, dafs jeder beliebig kleine Gewinn einen Vorteil erzeuge, welcher dem schon vorhandenen Ver-

---

[2] Oder auch: Das Aggregat der Produkte der einzelnen möglichen **Vorteile** in die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten stellt den **mittleren Vorteil** dar, und derjenige **Gewinn**, welcher diesen letzteren gleichfalls erzeugen würde, ist das Wertmafs des fraglichen Glücksfalles.

mögen umgekehrt proportional ist. Zur Erläuterung dieser Hypothese will ich zunächst sagen, was ich hier unter Vermögen verstehe, nämlich alles das, was uns Nahrung, Kleidung, Bequemlichkeit, ja auch Luxus und die Befriedigung irgend welcher Wünsche zu gewähren im stande ist. Hiernach können wir eigentlich von niemandem sagen, er besitze garnichts, wenn er nicht geradezu verhungert, und es wird für die Mehrzahl der Hauptteil ihres Vermögens in ihrer Arbeitskraft bestehen, welche auch die Fähigkeit zu betteln mit umfafst: wer sich durch Betteln jährlich 10 Goldgulden erwirbt, der wird wohl schwerlich unter der Bedingung, nie mehr zu betteln oder auf andere Weise etwas zu erwerben, eine Summe von 50 Goldgulden annehmen und auf diese Weise sich der Möglichkeit berauben, nach deren Aufzehrung weiter zu existieren; ja selbst wenn jemand garnichts besitzt und noch obendrein in Schulden steckt, so möchte ich es bezweifeln, ob er unter der gleichen Bedingung die Bezahlung seiner Schulden nebst einem noch weit gröfseren Geldgeschenke annehmen würde. Wenn nun aber der Bettler den obigen Vertrag nicht eingehen will, aufser wenn er eine Barsumme von mindestens 100 Goldgulden erhält, und jener mit Schulden belastete nur dann, wenn er 1000 Goldgulden bekommt, so werden wir sagen müssen, dafs der eine 100 der andere 1000 Goldgulden reich sei, obschon nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche jener nichts, dieser aber noch weniger als nichts besitzt.[2a]

[2a] Die wahre Bedeutung dieser auf den ersten Blick ziemlich befremdlich scheinenden Vermögens-Schätzung erhellt erst aus den im § 10 daraus resultierenden Folgerungen: man vergleiche hierzu insbesondere Anm. 4.

§ 6.

Nach Aufstellung dieser Definition kehre ich zu der Behauptung des vorigen Paragraphen zurück, dafs nämlich, falls nichts ungewöhnliches dazwischen tritt, der aus einem beliebig kleinen Gewinne erwachsende Vorteil als umgekehrt proportional dem vorhandenen Vermögen angesehen werden kann.[3]

[3] Zur Vervollständigung ist noch hinzuzufügen, dafs dieser Vorteil oder, wie er heute gewöhnlich genannt wird, der relative oder moralische Nutzen aufserdem als direkt proportional mit dem Geld- oder Tauschwerte (absoluten Werte) des betreffenden Gewinnes anzusehen ist (was B. offenbar als selbstverständlich voraussetzt). Der im Texte ausgesprochene Grundsatz, welcher speciell als das Daniel Bernoullische Princip bekannt ist und die Grundlage der in den folgenden Paragraphen entwickelten Theorie von der sog. moralischen Hoffnung bildet, beruht:

1) auf dem Erfahrungsgesetze, dafs dieser Vorteil (relative oder moralische Nutzen) mit der Gröfse des Gewinnes überhaupt zunimmt, andererseits aber um so geringer erscheint, je gröfser das bereits vorhandene Vermögen war, mit anderen Worten, dafs er eine zunehmende Funktion des Gewinnes, eine abnehmende des Vermögens sein mufs;

2) auf der Hypothese, dafs derselbe gerade direkt proportional mit dem Gewinne und umgekehrt proportional mit dem Vermögen variiert.

Gegen den ersten Teil dieser Hypothese dürfte sich schwerlich etwas einwenden lassen: derselbe figuriert ja auch als Grundlage für die allgemein acceptierte Theorie von der mathematischen Hoffnung und ist wohl niemals angefochten worden. Dagegen wird man dem zweiten Teile, welcher das specielle Eigentum Daniel Bernoullis ist und den eigentlichen Kernpunkt seiner Theorie bildet, den Vorwurf einer gewissen Willkürlichkeit nicht ersparen können, und man darf auch ohne Ungerechtigkeit zugeben, dafs eine durchgängige, kritiklose Anwendung dieses Principes zu offenbaren Ungereimtheiten führt. Immerhin

Eine genauere Betrachtung der menschlichen Natur zeigt in der That, dafs dieser Satz in den meisten Fällen anwendbar erscheint. Es giebt wenige, die ihre jährliche Einnahme nicht vollständig aufbrauchen. Gesetzt nun aber, jemand hat ein Vermögen von 100000 Dukaten, ein anderer ein solches von ebenso vielen halben Dukaten. Wenn dann der erstere hieraus ein jährliches Einkommen von 5000 Dukaten, der letztere wiederum ein solches von ebenso vielen halben Dukaten bezieht, so ist doch völlig klar, dafs für den einen ein ganzer Dukaten gerade nur so viel bedeutet, wie für den anderen ein halber, und dafs daher der Gewinn eines ganzen Dukaten für den ersten nicht mehr Wert hat, als der Gewinn eines halben Dukaten für den zweiten. Wenn also jeder von diesen

---

bin ich der Meinung, dafs dasselbe, mit Mafs und Vorsicht angewendet, gute Dienste leisten und z. B. in Fällen, wie die in §§ 15, 16 behandelten, für die Praxis brauchbare Winke geben kann. Auf der anderen Seite ist nicht zu verkennen, dafs die Tragweite dieser Theorie nicht nur von Bernoulli selbst, sondern auch von seinen Nachfolgern, sogar von dem grofsen Laplace, zweifellos überschätzt worden ist. Aber darum braucht man noch lange nicht, wie neuerdings J. Bertrand in seinem Calcul des Probabilités (Paris 1888) gethan, dieselbe als einfach absurd zu verwerfen, zumal sein einziges Argument eigentlich darin besteht, dafs er in ganz lustiger Weise eine Geschichte von zwei Spielern konstruiert, die sich — selbstverständlich — über die Bedingungen eines zwischen ihnen zu veranstaltenden Glücksspieles nicht einigen können, weil jeder bei deren Festsetzung seine eigene Vermögenslage nach Mafsgabe des Bernoullischen Principes zur Geltung bringen will. Im übrigen wird man selbst in diesem sonst gar nicht zur Anwendung des Bernoullischen Principes geeigneten Falle eine indirekte Bestätigung des eigentlichen Grundgedankens in dem Umstande erblicken dürfen, dafs ein einigermafsen feinfühliger Mensch sich nicht in ein Glücksspiel mit solchen Leuten einlassen wird, deren Vermögenslage allzusehr von der seinigen differiert.

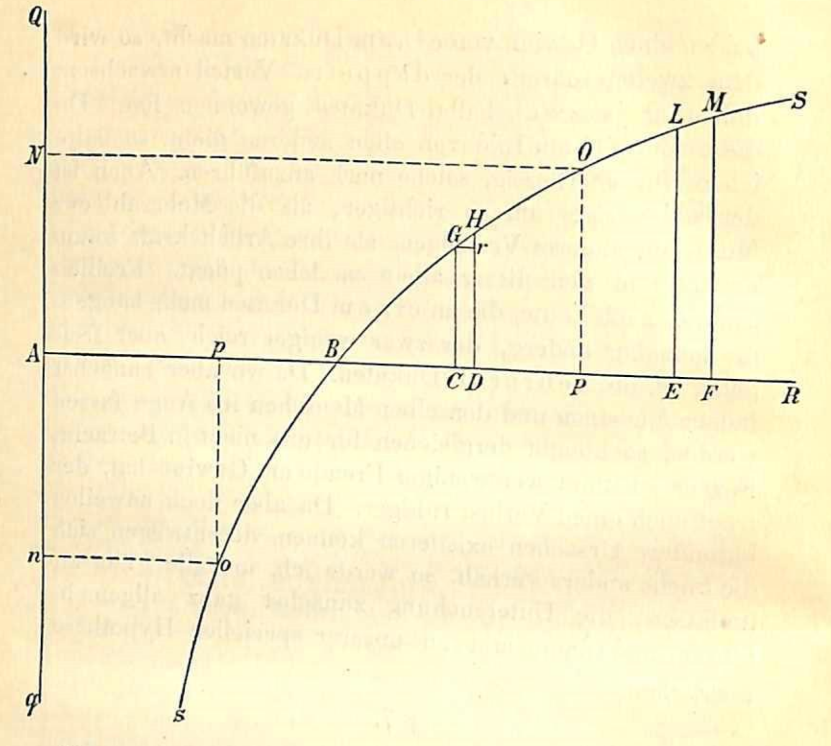
beiden einen Gewinn von einem Dukaten macht, so wird dem zweiten daraus der doppelte Vorteil erwachsen, indem er ja zwei halbe Dukaten gewonnen hat. Da dieses Beispiel ein Bild von allen anderen giebt, so halte ich es für überflüssig, solche noch anzuführen. Auch ist der obige Satz um so richtiger, als die Mehrzahl der Menschen anderes Vermögen, als ihre Arbeitskraft kaum besitzt und von dieser allein zu leben pflegt. Freilich giebt es auch Leute, die an einem Dukaten mehr hängen, als mancher andere, der zwar weniger reich, aber freigebig ist, an mehreren Dukaten. Da wir aber zunächst immer nur einen und denselben Menschen ins Auge fassen werden, so kommt dergleichen für uns nicht in Betracht. Ferner ist klar: wer weniger Freude am Gewinn hat, der trägt auch einen Verlust ruhiger. Da aber doch zuweilen besondere Ursachen existieren können, derentwegen sich die Sache anders verhält, so werde ich, um alle Fälle zu umfassen, die Untersuchung zunächst ganz allgemein führen und dann erst zu unserer speciellen Hypothese übergehen.

§ 7.

Es bezeichne also (s. d. Figur S. 32) AB das vor dem Eintritt des fraglichen Glüksfalles vorhandene Vermögen. Sodann werde über der Verlängerung BR von AB diejenige Kurve BGS konstruiert, deren Ordinaten CG, DH, EL, FM etc. die Vorteile darstellen, welche den als Abscissen aufgetragenen Gewinnen BC, BD, BE, BF etc. entsprechen. Ferner seien m, n, p, q etc. diejenigen Zahlen, welche angeben, wie oft die Gewinne BC, BD, BE, BF etc. eintreten können, alsdann wird (nach § 4) der mittlere Vorteil dargestellt durch:

$$PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM + \ldots}{m + n + p + q + \ldots}$$

Errichtet man nun AQ senkrecht auf AR und trägt darauf



AN = PO ab, so wird die Gerade NO — AB, d. h. BP den rechtmäfsig zu erhoffenden Gewinn oder den Wert des fragliches Glücksfalles darstellen. Wenn wir ferner wissen wollen, wie grofs der Einsatz sein mufs, welcher der obigen Glückshoffnung entspricht, so hat man die Kurve nach der entgegengesetzten Seite in der Weise fortzusetzen, dafs jetzt die Abscisse Bp jedesmal den Verlust, dagegen die zugehörige Ordinate po den diesem Verluste entsprechenden Nachteil darstellt. Da aber bei einem Spiele mit gerechten Bedingungen der Nachteil aus dem Verlust gleich dem Vorteile aus dem Gewinn sein mufs, so hat man An = AN oder: po = PO zu nehmen: alsdann bezeichnet Bp den Einsatz, den niemand

überschreiten sollte, der auf seine Vermögensverhältnisse die gebührende Rücksicht nimmt.

§ 8.

Zusatz I. Bei der bisher von den Gelehrten gewöhnlich angewendeten Hypothese, welche auf der Behauptung beruht, dafs jeder Gewinn ausschliefslich nach sich selbst zu schätzen sei, und dafs er stets einen direkt proportionalen Vorteil nach sich ziehe, wird die Kurve BS eine gerade Linie; wenn daher wiederum:

$$PO = \frac{m \,.\, CG + n \,.\, DH + p \,.\, EL + q \,.\, FM + \ldots}{m + n + p + q + \cdots}$$

so folgt, sobald man auf beiden Seiten die entsprechenden proportionalen Gröfsen einführt, dafs:

$$BP = \frac{m \,.\, BC + n \,.\, BD + p \,.\, BE + q \,.\, BF + \ldots}{m + n + p + q + \cdots}$$

wird — völlig übereinstimmend mit der gewöhnlich angewendeten Regel.

§ 9.

Zusatz II. Wenn AB selbst im Verhältnisse zu dem gröfsten überhaupt möglichen Gewinne BF als unendlich grofs erscheint, so wird der Bogen BM als eine unendlich kleine gerade Linie betrachtet werden dürfen, und in diesem Falle wird also wieder jene gewöhnliche Regel Platz greifen: dieselbe gilt somit sehr näherungsweise bei allen Spielen, in denen es sich um verhältnismäfsig kleine Summen handelt.

§ 10.

Nachdem wir so die Untersuchung ganz allgemein geführt haben, wenden wir uns jetzt zu jener oben erwähnten besonderen Hypothese, welche in der That vor allen anderen Betrachtung verdient. Zunächst ist hier unter Beibehaltung der Voraussetzungen des § 7 die Natur

der Kurve sBS zu untersuchen. Da wir aber auf Grund unserer Hypothese unendlich kleine Gewinne zu betrachten haben, so werden wir die Gewinne BC und BD als nahezu gleich ansehen, sodafs also ihre Differenz CD unendlich klein wird. Zieht man dann Gr parallel zu BR, so wird rH den unendlich kleinen Vorteil darstellen, den jemand mit dem Vermögen AC durch den unendlich kleinen Gewinn CD erwirbt. Dieser Vorteil aber darf nicht blofs nach dem kleinen Gewinne CD (dem er allerdings unter sonst gleichen Verhältnissen proportional ist) abgeschätzt werden, sondern auch nach dem vorhandenen Vermögen AC, dem er umgekehrt proportional ist. Setzt man also:

$$AC = x \quad CD = dx \quad CG = y \quad rH = dy,$$

aufserdem:

$$AB = \alpha,$$

und bezeichnet b eine gewisse Konstante, so hat man[4]:

$$dy = \frac{b \, . \, dx}{x}$$

[4] Diese „Differential-Gleichung“:

$$dy = b \cdot \frac{dx}{x}$$

ist lediglich die mathematische Formulierung der in § 5 ausgesprochenen (durch Anm. 3 vervollständigten) Hypothese, dafs jeder noch so kleine („unendlich-kleine“) Gewinn, d. h. Vermögens-Zuwachs dx einen Vorteil dy erzeugt, welcher diesem ersteren direkt, dagegen dem bereits vorhandenen Vermögen x umgekehrt proportional ist, wobei also b einen, bis zu einem gewissen Grade willkürlich zu wählenden, aber für alle Werte x unveränderlichen „Proportionalitäts-Faktor“ bedeutet.

Aus dieser Differential-Gleichung folgt zunächst, dafs zwischen x und y eine Beziehung von der Form bestehen mufs:

$$y = b \cdot \lg x + C,$$

wo das Zeichen lg x den natürlichen Logarithmus von

d. h.

$$y = b \cdot \lg \frac{x}{\alpha}$$

---

x, C eine Konstante bedeutet. Denn aus dieser letzteren Beziehung geht durch Differentiation wieder die obige Differential-Gleichung hervor. Der Wert der Konstanten C ist nicht willkürlich, sondern bestimmt sich aus der Bedingung, daſs im Falle gar kein Gewinn gemacht, also auch kein Vorteil y erzielt wird, d. h. im Falle $y = 0$, das Vermögen x seinen ursprünglichen Wert α behält, d. h. man hat:

$$0 = b \cdot \lg \alpha + C$$

also:

$$C = - b \cdot \lg \alpha,$$

sodaſs die obige „Integral-Gleichung" die Form annimmt:

$$y = b \cdot \lg x - b \cdot \lg \alpha = b \cdot \lg \frac{x}{\alpha}.$$

In Worten: Geht infolge irgend eines Ereignisses eine ursprünglich vorhandene Summe α in die Summe x über, erzielt also der Besitzer des Vermögens α einen Gewinn $x - \alpha$ (bezw. wenn $x - \alpha$ negativ ausfällt, einen Verlust $\alpha - x$), so wird der **relative** oder **moralische** Wert dieses Gewinnes (bezw. Verlustes) dargestellt durch die Formel:

$$y = b \cdot \lg \frac{x}{\alpha},$$

wo b einen positiven von α und x unabhängigen Proportionalitäts-Faktor bedeutet (der lediglich von anderen Umständen, wie Zeit, Ort, individuellen Verhältnissen u. dergl. abhängen kann).

Da dieser relative Gewinn-Wert y nicht, wie dessen absoluter Wert $x - \alpha$, von der Differenz $x - \alpha$, sondern von dem Quotienten $\frac{x}{\alpha}$ abhängt, so erkennt man, daſs derselbe bei gleichen Werten von x und abnehmenden Werten von α sehr viel schneller zunimmt, als der absolute Gewinn-Wert $x - \alpha$, in der Weise, daſs er geradezu

Es ist daher die Kurve sBS eine logarithmische Linie,

über alle Grenzen wächst, wenn α unter jede Grenze herabsinkt.

Ist $x > \alpha$, also $x - \alpha$ positiv, so gilt offenbar das gleiche von y; dagegen wird für $x < \alpha$, geradeso wie $x - \alpha$, auch y negativ. Ist endlich $x = \alpha$, findet also weder Gewinn, noch Verlust statt, so wird auch: $y = b \cdot \lg 1 = 0$.

Im Falle eines negativen Wertes α liefert die Formel:

$$y = b \cdot \lg \frac{x}{\alpha}$$

(NB. x immer als wesentlich positiv vorausgesetzt) für y einen komplexen Wert, d. h. einen solchen von der Form: $A + B \cdot \sqrt{-1}$, und somit kein praktisch brauchbares Resultat. Die Möglichkeit für das Eintreten dieses Falles erscheint aber gerade durch die in § 5 eingeführte Vermögens-Schätzung definitiv ausgeschlossen, da ja nach der dort getroffenen Festsetzung das Vermögen α unter keinen Umständen als eine negative Gröfse angesehen wird, und der äufserste noch als zulässig erscheinende Grenzfall $\alpha = 0$ nur für denjenigen eintritt, der geradezu am Verhungern ist. Da nun, wie bereits bemerkt, mit unbegrenzt abnehmenden positiven Werten von α der Wert von y — wie klein im übrigen auch der positive Wert x angenommen werden möge — unbegrenzt zunimmt, so wird man sagen müssen, dafs jenem Grenzfalle $\alpha = 0$ der Wert $y = +\infty$ entspricht. Hiernach würde also aus jedem (noch so kleinen) Gewinne ein schlechthin als „unendlich grofs" zu bezeichnenden Vorteil nur demjenigen erwachsen, der jeder Fähigkeit eines Erwerbes (einschliefslich des Bettelns) beraubt, eben im Begriffe ist, zu verhungern; während jedem, dem noch irgend eine Existenz-Möglichkeit offen steht, jeglicher Gewinn einen allemal noch durch Zahlen mefsbaren Vorteil bringen würde, der nur als um so gröfser anzuschlagen ist, je schlechter des Betreffenden Vermögens-Verhältnisse sind.

Durch diese den Anschauungen des gesunden Menschen-Verstandes durchaus entsprechenden Ergebnisse findet die in § 5 aufgestellte Vermögens-Definition ihre nachträgliche Rechtfertigung.

deren Subtangente stets = b und deren Asymptote die Gerade Qq ist[5].

§ 11.

Vergleicht man dieses Resultat mit dem in § 7 gesagten, so ist offenbar:

$$PO = b \,.\, \lg \frac{AP}{AB}$$

und ebenso:

$$CG = b \,.\, \lg \frac{AC}{AB},\quad DH = b \,.\, \lg \frac{AD}{AB},\ \text{u. s. f.}$$

---

[5] Dafs die fragliche Kurve die Y-Axe zur Asymptote hat, erkennt man ohne weiteres daraus, dafs für $x = 0$: $y = -\infty$ wird.

Dagegen bedarf die auf die Subtangente bezügliche Bemerkung einer Korrektur oder zum mindesten, wenn man dem Ausdrucke „Subtangente" die heute durchweg übliche Bedeutung beilegt, einer Modifikation. Man hat hier nämlich unter „Subtangente" nicht, wie sonst üblich, die Projektion der Tangente (vom Schnittpunkte mit der Abscissen-Axe bis zum Berührungspunkte) auf die Abscissen-Axe zu verstehen, sondern die Projektion der Tangente — vom Schnittpunkte mit der Ordinaten-Axe bis zum Berührungspunkte — auf die Ordinaten-Axe (d. h. mit anderen Worten: die Subtangente im gewöhnlichen Sinne, jedoch für den Fall, dafs man die Y-Axe zur Abscissen-Axe macht). Bezeichnet man nämlich die Länge dieser Linie mit t und mit φ und ψ die Winkel, welche die Tangente, bezw. mit der positiven Abscissen- und Ordinaten-Richtung bildet, so hat man offenbar:

$$\frac{t}{x} = \cot \psi = \operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{dx},$$

und da hier:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{x}$$

wird, schliefslich:

$$t = b \cdot -$$

Da nun:

$$PO = \frac{m . CG + n . DH + p . EL + q . FM + \ldots}{m + n + p + q \ldots}$$

so folgt jetzt:

$$b . \lg \frac{AB}{AP} = \left(mb . \lg \frac{AC}{AB} + nb . \lg \frac{AD}{AB} + pl . \lg \frac{AE}{AB} + qb . \lg \frac{AF}{AB} + \ldots\right) : (m + n + p + q + \ldots)$$

und daher:

$$AP = (AC^m . AD^n . AE^p . AF^q \ldots)^{\frac{1}{m+n+p+q+\ldots}}.$$

Subtrahiert man hiervon noch AB, so stellt der Rest BP den Wert des fraglichen Glücksfalles dar[6].

---

[6] Wendet man wiederum die Bezeichnungen der Anm. 1 an, d. h. bezeichnet man die einzelnen zu erwartenden Gewinne mit $g_1, g_2, \cdots g_n$, die Anzahl der Fälle, in denen sie eintreten können, bezw. mit $a_1, a_2 \cdots a_n$, aufserdem das vorhandene Vermögen, wie oben, mit α, so ergiebt sich als relativer Wert des fraglichen Glücksfalles, oder, wie man auch (nach Laplace) zu sagen pflegt, als Wert der moralischen Hoffnung der Ausdruck:

$$H = \left\{(a+g_1)^{a_1} (\alpha+g_2)^{a_2} \cdots (\alpha + g_n)^{a_n}\right\}^{\frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}} - \alpha$$

oder auch, wenn man wiederum $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s$ setzt:

$$H = (\alpha + g_1)^{\frac{a_1}{s}} (\alpha + g_2)^{\frac{a_2}{s}} \cdots (a + g_n)^{\frac{a_n}{s}} - \alpha$$

$$= (\alpha + g_1)^{p_1} (a + g_2)^{p_2} \cdots (a + g_n)^{p_n} - \alpha,$$

wo $p_k = \frac{\alpha_k}{s}$ $(k = 1, 2, \cdots n)$, die für das Eintreten des Gewinnes g_k resultierende Wahrscheinlichkeit bedeutet. Hiernach kann man die Regel des § 12 etwas kürzer folgendermafsen aussprechen: Man erhält den Wert der moralischen Hoffnung, wenn man die einzelnen möglichen Gewinne jedesmal um das vorhandene Vermögen vermehrt und mit den betreffenden Wahrscheinlichkeiten potenziert;

§ 12.

Der vorige Paragraph liefert also die folgende Regel: Man erhebe jeden einzelnen möglichen Gewinn, nachdem man zuvor das vorhandene Vermögen dazu addiert, in diejenige Potenz, welche durch die Anzahl der entsprechenden Fälle angegeben wird; darauf multipliziere man alle diese Potenzen mit einander und ziehe aus ihrem Produkte diejenige Wurzel, deren Grad gleich der Summe aller überhaupt möglichen Fälle ist: subtrahiert man dann schliefslich von dieser Wurzel das vorhandene Vermögen, so giebt der Rest den Wert des fraglichen Glücksfalles an.

Dieser Satz ist grundlegend für die Wertbestimmung einer Glückshoffnung in den verschiedensten Fällen, und ich könnte auf ihm — gerade so, wie es bisher mit der gewöhnlichen Hypothese geschehen ist — eine vollständige Theorie aufbauen. Indessen, so sehr sich auch ein solches Unternehmen durch seine Nützlichkeit, wie durch seine Neuheit empfehlen würde, so zwingen mich doch andere bereits begonnene Arbeiten, davon abzusehen. Ich will daher an dieser Stelle von dem, was sich mir bei einigem Nachdenken zunächst darbot, nur das wichtigste anführen.

§ 13.

Vor allem ergiebt sich aus dem vorigen, dafs bei jedem Spiele, mögen dessen Bedingungen noch so gerecht angenommen werden, jeder der beiden Mitspieler von vornherein einen bestimmten Verlust erleidet — gewifs ein deutlicher Fingerzeig der Natur, das Glückspiel zu

---

darauf diese Potenzen mit einander multipliziert und ihr Produkt um das vorhandene Vermögen vermindert.

meiden. Es folgt dies aber aus der Konkavität der Kurve sBS gegen BR. Macht man nämlich den Einsatz Bp gleich dem erhofften Gewinne BP, so zeigt es sich, dafs der im Verlustfalle sich ergebende Nachteil po stets gröfser wird als der eventuell zu erhoffende Vorteil PO[7]. Obschon dies aber für den Mathematiker an sich hinlänglich klar erscheint, so will ich dies doch zum allgemeinen Verständnis noch durch ein Beispiel erläutern. Es seien also zwei Spieler vorhanden, von denen jeder ein Vermögen von 100 Dukaten besitzt und die Hälfte davon bei einem nach beiden Seiten gleiche Chancen bietenden Spiele einsetzt. Alsdann wird jeder noch 50 Dukaten und dazu die Hoffnung auf den Gewinn von

[7] Die Richtigkeit dieser Behauptung läfst sich auf dem Wege der Rechnung folgendermafsen begründen. Angenommen, es werde das vorhandene Vermögen α einmal durch den Gewinn g in $\alpha + g$, das andere Mal durch den Verlust g in $\alpha - g$ übergeführt. Dann wird der moralische Wert G des Gewinnes g nach § 10 dargestellt durch die Formel:

$$G = b \cdot \lg \frac{\alpha + g}{\alpha} = b \left\{ \lg (\alpha + g) - \lg \alpha \right\}$$

und ebenso der moralische Wert G' des Verlustes g durch:

$$G' = b \cdot \lg \frac{\alpha - g}{\alpha} = b \left\{ \lg (\alpha - g) - \lg \alpha \right\},$$

und daher ist der positive Wert |G'| dieser an sich negativen Gröfse:

$$|G'| = b \left\{ \lg \alpha - \lg (\alpha - g) \right\}.$$

Hiernach wird:

$$G - |G'| = b \left\{ \lg (\alpha + g) + \lg (\alpha - g) - 2 \lg \alpha \right\}$$

$$= b \cdot \lg \frac{\alpha^2 - g^2}{\alpha^2}$$

$$< 0 \quad \left(\text{da } \frac{\alpha^2 - g^2}{\alpha^2} < 1 \right)$$

also:

$$G < |G'|, \text{ q. e. d.} —$$

100 Dukaten haben. Die Summe hiervon repräsentiert aber nach der Regel des § 12 einen Wert von nur $(50^1 . 150^1)^{\frac{1}{2}}$ oder: $\sqrt{50 . 150}$ d. h. weniger als 87 Dukaten, sodafs also trotz der völligen Gleichheit der Chancen jeder bei dem Spiele einen Nachteil von mehr als 13 Dukaten erleidet. Um aber auch noch jene andere, dem natürlichen Verstande von selbst einleuchtende Wahrheit recht deutlich zu machen, dafs nämlich ein Spieler um so thörichter handle, je beträchtlicher der Teil seines Vermögens ist, den er einem Glücksspiele aussetzt, wollen wir dasselbe Beispiel mit dem einzigen Unterschiede betrachten, dafs der eine Spieler vor dem Einsatze seiner 50 Dukaten deren 200 besessen habe. Dieser erleidet dann einen Nachteil, welcher durch den Ausdruck $200 - \sqrt{150 . 250}$ dargestellt wird, also einen solchen von nur wenig über 6 Dukaten.

§ 14.

Wenn hiernach jeder, der einen noch so kleinen Teil seines Vermögens einem Glücksspiele mit gleichen Chancen aussetzt, unklug handelt, so wird es von Interesse sein, hier zu untersuchen, einen wie grofsen Vorteil man beim Einsatze des Geldes vor seinem Mitspieler voraus haben müsse, um sich ohne Schaden auf das Spiel einlassen zu können. Nehmen wir wiederum das Spiel möglichst einfach an: es bestehe aus zwei gleich möglichen Fällen, einem günstigen und einem ungünstigen. Der im glücklichen Falle zu erlangende Gewinn sei $= g$, der im unglücklichen zu verlierende Einsatz $= x$, das vorhandene Vermögen $= \alpha$. Alsdann wird.

$$AB = \alpha \quad BP = g \quad PO = b \lg \frac{\alpha + g}{\alpha} \text{ (s. § 10)}$$

und da (nach § 7): $po = PO$ ist, so ergiebt sich aus der Natur der logarithmischen Kurve:

$$Bp = \frac{\alpha g}{\alpha + g}$$

Da aber Bp den Einsatz x darstellt, so hat man:

$$x = \frac{\alpha g}{\alpha + g}$$

also eine Gröfse, welche stets kleiner ist, als der erhoffte Gewinn g[8]. Hieraus geht auch hervor, dafs der sehr thöricht handelt, welcher sein ganzes Vermögen wegen einer noch so grofsen Gewinnhoffnung aufs Spiel setzt, wie jeder leicht begreifen wird, der unsere vorausgeschickten Definitionen richtig erfafst hat. Und auch die im bürgerlichen Leben allgemein anerkannte Thatsache, dafs der Eine irgend eine zweifelhafte Sache vernünftigerweise riskieren darf, ein anderer aber nicht — findet im vorstehenden seine Erklärung.

§ 15.

Eine besondere Betrachtung verdienen hier die Gepflogenheiten der Kaufleute bei der Versicherung der Waren auf See. Zur Erläuterung diene das folgende

---

[8] Etwas deutlicher folgendermafsen: Für den relativen oder moralischen Wert G des Gewinnes g hat man:

$$G = b \cdot \lg \frac{\alpha + g}{\alpha} = b \cdot \left\{ \lg(\alpha + g) - \lg \alpha \right\}$$

und für den moralischen Wert X des Verlustes x:

$$X = b \cdot \lg \frac{\alpha - x}{\alpha} = b \left\{ \lg(\alpha - x) - \lg \alpha \right\},$$

folglich für den positiven Wert $|X|$ dieser an sich negativen Gröfse:

$$|X| = b \left\{ \lg \alpha - \lg(\alpha - x) \right\}.$$

Soll nun $|X| = G$ werden, so mufs die Beziehung stattfinden:

$$\lg \alpha - \lg(\alpha - x) = \lg(\alpha + g) - \lg(\alpha),$$

also:

$$\lg(\alpha - x) = \lg \frac{\alpha^2}{\alpha + g},$$

woraus schliefslich:

$$x = \frac{\alpha g}{\alpha + g}, \text{ q. e. d.} —$$

Beispiel. Cajus aus Petersburg hat in Amsterdam Waren gekauft, die er für 10 000 Rubel verkaufen könnte, wenn er sie in Petersburg liegen hätte. Er läſst sie also auf dem Seewege anfahren, ist aber unsicher, ob er sie versichern soll oder nicht. Dabei weiſs er, daſs von hundert Schiffen, die um diese Jahreszeit von Amsterdam nach Petersburg fahren, gewöhnlich fünf zu Grunde gehen. Immerhin kann er niemanden finden, der für einen geringeren Preis als 800 Rubel die Versicherung übernehmen will, was ihm auſserordentlich hoch erscheint. Es fragt sich also: Wie groſs muſs das Vermögen des Cajus auſser den genannten Waren sein, damit er verständigerweise die Versicherung unterlassen könne? Dieses Vermögen sei nun $= x$; dann wird dasselbe im Verein mit der Hoffnung auf eine glückliche Landung der Waren dargestellt durch den Ausdruck:

$$\sqrt[100]{(x+10\,000)^{95} \,.\, x^5} = \sqrt[20]{(x+10\,000)^{19} \,.\, x},$$

falls er auf die Versicherung verzichtet: falls er dagegen darauf eingeht, so hat er ein sicheres Gesamtvermögen von: $(x+9200)$. Setzt man diese beiden Gröſsen einander gleich, so ergiebt sich:

$$(x+10\,000)^{19} \,.\, x = (x+9200)^{20}$$

und hieraus näherungsweise: $x = 5043$. Wenn also Cajus auſser der Hoffnung auf seine Waren noch über 5043 Rubel besitzt, so wird er gut thun, die Versicherung zu unterlassen; besitzt er aber weniger, so sollte er darauf eingehen. Wenn nun ferner gefragt wird: Wieviel Vermögen muſs derjenige, welcher die Versicherung für 800 Rubel übernommen hat, mindestens besitzen, um dies verständigerweise thun zu können? so ergiebt sich zur Berechnung dieses Vermögens y die Gleichung:

$$\sqrt[20]{(y+800)^{19}\,(y-9200)} = y$$

und hieraus näherungsweise: $y = 14\,243$ — eine Zahl,

die man auch ohne neue Rechnung aus der oben gefundenen hätte ableiten können[9]. Wer also weniger besitzt, der handelt thöricht, wenn er die Versicherung übernimmt, wogegen jemand mit gröfserem Vermögen garnicht unrecht damit hätte. Daraus geht hervor, wie vorteilhaft sich die Einführung solcher Versicherungen erweist, da sie beiden Teilen grofsen Nutzen bringen können. Hätte Cajus schon für 600 Rubel die Versicherung erzielen können, so wäre es unklug gewesen, sie zurückzuweisen, solange er weniger als 20478 Rubel besitzt; dagegen würde er allzu ängstlich handeln, wenn er bei einem Vermögen von über 20478 Rubeln die Waren so versichert. So würde andererseits auch jemand, der weniger als 29878 Rubel besitzt, nicht klug thun, falls er dem Cajus die Versicherung für 600 Rubel antrüge; dagegen wäre dies für ihn vorteilhaft, falls er mehr besitzt. Niemand aber — und wäre er noch so reich — würde ein gutes Geschäft machen, wenn er die fragliche Versicherung für 500 Rubel übernimmt.

§ 16.

Ferner ergiebt sich aus unserer Theorie noch eine weitere Regel, die für manche gleichfalls nicht ohne Nutzen sein wird, nämlich dafs es geratener ist, solche Güter, die einer Gefahr ausgesetzt sind, in mehrere Teile

---

[9] Setzt man nämlich:

$$y = z + 9200,$$

so geht die Gleichung zur Bestimmung von y über in die folgende:

$$\sqrt[20]{(z + 1000)^{19} \cdot z} = z + 9200$$

oder:

$$(z + 10000)^{19} \cdot z = (z + 9200)^{20},$$

d. h. man erhält, wie die Vergleichung mit der im Texte aufgestellten Bestimmungsgleichung für x lehrt: $z = x$ und daher:

$$y = x + 9200.$$

zu zerlegen, als sie alle auf einmal zu riskieren. Ich will dies wiederum näher erläutern. Sempronius besitzt im ganzen bare 4000 Dukaten und aufserdem in fernen Ländern Waren im Werte von 8000 Dukaten, deren Transport nur zur See geschehen kann. Erfahrungsgemäfs stehe aber fest, dafs von 10 Schiffen je eins zu Grunde geht. Unter diesen Umständen behaupte ich, dafs die aus den Waren erwachsende Hoffnung für Sempronius einen Wert von 6751 Dukaten (nämlich: $\sqrt[10]{12000^9 . 4000} - 4000$) repräsentirt, falls er die ganzen 8000 Dukaten einem einzigen Schiffe anvertraut. Wenn er aber die Waren zu gleichen Teilen auf zwei Schiffe verladen läfst, so hat seine Hoffnung einen Wert von: ($\sqrt[100]{12\,000^{81} . 8000^{18} . 4000} - 4000$) d. h. 7033 Dukaten. Und so wird die Hoffnung des Sempronius sich immer günstiger gestalten, je kleiner die einzelnen Teile sind, die je einem Schiffe anvertraut werden. Immerhin wird dieselbe niemals den Wert von 7200 Dukaten übersteigen. Diese Bemerkung dürfte auch für diejenigen von Nutzen sein, welche ihr Vermögen in Wertpapieren anlegen oder es anderen Wechselfällen des Glückes aussetzen.

§ 17.

Sehr vieles von dem, was ich nun leider übergehen mufs, dürfte gleichfalls neu und keineswegs wertlos erscheinen. Und wenn freilich auch jeder, der mit einigem gesunden Menschenverstande begabt ist, den gröfsten Teil davon schon von selbst einsieht und darnach handelt, so dürfte doch früher niemand geglaubt haben, dafs man diese Dinge so scharf definieren kann, wie es in diesen Beispielen geschehen ist. Und gerade weil alle diese Sätze so vortrefflich mit den Ergebnissen der natürlichen Erfahrung übereinstimmen, so wäre es unrecht,

sie wie unbewiesene Wahrheiten, die sich nur auf unsichere Hypothesen stützen, zu vernachlässigen. Dies mag auch noch durch das folgende Beispiel bestätigt werden, das zu den vorliegenden Betrachtungen den Anstofs gegeben hat, und dessen Geschichte folgende ist. Mein sehr verehrter Oheim, der berühmte Nicolaus Bernoulli, Professor beider Rechte an der Akademie zu Basel, legte einmal dem bekannten Montmort fünf Probleme vor, die man in dem Buche: Analyse sur les jeux de hazard de Mr. de Montmort, p. 402 findet. Das letzte dieser Probleme lautet folgendermafsen: Peter wirft eine Münze in die Höhe und zwar so lange, bis sie nach dem Niederfallen die Kopfseite zeigt; geschieht dies nach dem ersten Wurf, so soll er dem Paul 1 Dukaten geben; wenn aber erst nach dem zweiten: 2, nach dem dritten: 4, nach dem vierten: 8, und so fort in der Weise, dafs nach jedem Wurfe die Anzahl der Dukaten verdoppelt wird. Man fragt: Welchen Wert hat die Gewinnhoffnung für Paul? — Diese Aufgabe erwähnte mein oben genannter Oheim in einem an mich gerichteten Briefe und knüpfte daran den Wunsch, meine Ansicht darüber zu hören. Obschon nämlich die Rechnung zeige, dafs die Hoffnung des Paul unendlich grofs ist, so dürfte es, wie er bemerkt, doch wohl keinen halbwegs vernünftigen Menschen geben, der nicht jene Hoffnung gern für 20 Dukaten verkaufen würde. In der That, sobald wir diese Sache nach den gewöhnlichen Regeln angreifen, finden wir für die Gewinnhoffnung des Paul einen unendlich grofsen Wert, wiewohl niemand dieselbe auch nur für einen ziemlich geringen Preis erwerben wollen wird[10].

---

[10] Die obige Aufgabe, welche gemeinhin unter dem Namen des Petersburger Problems bekannt geworden

Wenn wir aber die Rechnung nach unseren neuen Regeln anstellen, so finden wir erst die richtige Lösung dieses

---

ist, hat einer groſsen Zahl von Mathematikern viel Kopfzerbrechen verursacht. Wie mir scheint, sehr überflüssiger Weise! Denn die *mathematische Rechnung* oder, genauer bezeichnet, die Anwendung der üblichen *Formel für die mathematische Hoffnung* liefert in Wahrheit absolut nichts, was dem *gemeinen Verstande zuwiderliefe* oder auch nur *paradox* erscheinen könnte, sofern man nur den letzteren auch schon bei der *Stellung des fraglichen Problems* einigermaſsen zu Rate zieht. Will man nämlich die *mathematische Lösung* irgend eines Problems mit den Ergebnissen der *täglichen Erfahrung* vergleichen, so muſs doch vor allem das Problem selbst so gestellt sein, daſs dasselbe *erfahrungsgemäſs denkbar* erscheint. Bei der Aufgabe, wie sie oben gestellt ist, wird nun angenommen, daſs eventuell *in infinitum* fortgespielt wird, denn es erscheint ja in der That *a priori* keineswegs ausgeschlossen, daſs, solange man auch die Münze werfen möge, beständig die *Schrift* nach oben fällt. *Einzig und allein* auf der Voraussetzung, daſs es in diesem Falle effektiv *möglich* erscheint, einen *unendlich groſsen Gewinn* zu erzielen, beruht das Zustandekommen eines gleichfalls *unendlich groſsen* Wertes für die *Gewinnhoffnung*, d. h. für den zu leistenden *Einsatz*. Nun kann man sich zwar allenfalls vorstellen, daſs *Peter* und *Paul*, bezw. deren Erben das Spiel nötigenfalls *in infinitum* fortsetzen; dagegen erscheint es schlechthin als eine *logische Unmöglichkeit*, sich einen *unendlich groſsen* Gewinn vorzustellen, welcher nach *Schluſs* (!) des *unendlich lange* währenden Spieles zur Auszahlung gelangt. Infolge dessen ist es aber einfach *absurd*, zu fragen, ob ein auf Grund dieser Fiktion herausgerechneter *Einsatz* mit den *Eingebungen des praktischen Verstandes* in Einklang gebracht werden kann.

Solange man in dieser völlig vagen und — nach heutigen mathematischen Begriffen — durchaus unzulässigen Weise mit dem „*Unendlichen*" operiert, kann überhaupt niemals etwas vernünftiges herauskommen. Will man zu wirklich brauchbaren Resultaten gelangen, so wird man zu-

Knotens. Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich nämlich auf Grund unserer Principien folgendermafsen.

---

nächst das Spiel als begrenzt voraussetzen müssen, d. h. man nehme an, es sei eine bestimmte Zahl n als Maximalzahl der überhaupt zulässigen Würfe festgesetzt, derart, dafs also spätestens mit dem n^{ten} Wurfe das Spiel abbricht, und Peter verpflichtet ist, an Paul die Gewinn-Summe 2^n auszuzahlen, falls die Münze bei allen n Würfen Schrift gezeigt hat (da ja in diesem Falle frühestens mit dem $(n+1)^{ten}$ Wurfe Kopf zum Vorschein kommen könnte). Dabei kann man sich — vorläufig wenigstens — die Zahl n noch beliebig grofs denken, z. B. so grofs, dafs sie ausreichen würde, um nötigenfalls Peter und Paul, auch wenn sie das Alter Methusalems erreichen sollten, bis an ihr Lebensende mit dem fraglichen Spiele zu beschäftigen: es wird sich freilich sogleich zeigen, dafs diese Zahl n in der Praxis sehr engen Schranken unterliegt.

Unter der eben gemachten Voraussetzung werden die Wahrscheinlichkeiten, beim 1ten, bezw. frühestens beim 2ten, 3ten, ... n^{ten} Wurfe Kopf zu treffen, dargestellt durch die Zahlen:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots \frac{1}{2^n},$$

während die entsprechenden Gewinne die Werte:

$$1, 2^1, 2^2, \dots 2^{n-1}$$

besitzen. Dazu kommt noch als höchster möglicher Gewinn 2^n mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^n}$ (für den Fall, dafs auch noch beim n^{ten} Wurfe Schrift fällt), und es wird daher Pauls mathematische Hoffnung dargestellt durch die Formel:

$$h = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 2^1 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{2^n} \cdot 2^n$$
$$= \frac{n}{2} + 1.$$

Dies ist also auch der Wert des zu leistenden Einsatzes, während der allenfalls mögliche Maximal-Gewinn den Werth 2^n besitzt. Hieraus sieht man zunächst, dafs mit der Anzahl n der zulässigen Würfe auch der Einsatz be-

§ 18.

Die Anzahl der zu betrachtenden Fälle ist hier unendlich grofs. Die Hälfte davon fällt so aus, dafs das

---

ständig, aber freilich im Vergleiche zu dem Maximal-Gewinn aufserordentlich langsam wächst, und es ist auch nichts dagegen einzuwenden, wenn man sagt, dafs derselbe über alle Grenzen wächst, wenn n an keine Grenze gebunden ist, d. h. wenn es für zulässig gilt, das Spiel eventuell in infinitum fortzusetzen. Aber hierin liegt doch wahrlich nichts paradoxes, vielmehr dürfte es dem simpelsten Verstande einleuchten, dafs mit zunehmenden Gewinn-Chancen bei gerechten Spielbedingungen auch der Einsatz zunehmen mufs. Fragt man nun aber, bis zu welcher Grenze es für Paul praktisch vernünftig erscheint, den betreffenden Einsatz zu leisten, so wird man vor allem darüber Klarheit gewinnen müssen, inwieweit Peter in der Lage sein dürfte, die möglichen Gewinne auch wirklich auszuzahlen. Nimmt man beispielsweise $n = 100$ an — was doch im Vergleiche zu dem ursprünglich in infinitum proponierten Spiele als eine sehr bescheidene Zahl erscheint — so hätte also Peter in dem für ihn ungünstigsten Falle den Gewinn von 2^{100} Dukaten auszuzahlen. Da nun:

$$\log 2 = 0{,}30103 \cdots$$

und daher:

$$\log 2^{100} = 100 \lg 2 = 30{,}103 \cdots,$$

so ergiebt sich, dafs 2^{100} eine Zahl mit 31 Ziffern bedeutet. Da eine Milliarde = 1000 Millionen nur aus einer 1 mit 9 Nullen und somit die dritte Potenz einer Milliarde aus einer 1 mit 27 Nullen, also erst aus 28 Ziffern besteht, so erkennt man, dafs jener Gewinn von 2^{100} Dukaten eine Summe repräsentiert, zu deren Zahlung alle Schätze der Erde nicht ausreichen würden. Paul wäre daher aufserordentlich thöricht, wenn er auf die Möglichkeit hin, eventuell einen Gewinn zu erzielen, der ihm unter keinen Umständen ausbezahlt werden kann, den entsprechenden, verhältnismäfsig immerhin noch sehr bescheidenen Einsatz von 51 Dukaten leisten würde.

Spiel mit dem ersten Wurfe zu Ende ist; der vierte Teil so, dafs dies mit dem zweiten Wurfe stattfindet; der achte

---

Betrachten wir als zweites Beispiel den Fall $n = 30$, so wird hier:

$$\log 2^{30} = 30 \lg 2 = 9{,}0309 \cdots,$$

so dafs also hier für den Maximalgewinn 2^{30} eine Zahl von etwas über eine *Milliarde* resultiert. Nehmen wir ferner an, um die ins Spiel kommenden Summen praktischen Verhältnissen ein wenig näher zu rücken, dafs *Peter* und *Paul* nicht um *Dukaten*, sondern um *Zehntel-Pfennige* spielen, so würde der von *Peter* eventuell zu zahlende Maximalgewinn immerhin noch *eine Million Mark* betragen, während der von *Paul* zu leistende Einsatz sich auf 1,6 Pfennige reduziert. Nun frage ich, ob irgend jemand den *Paul*, auch wenn derselbe keineswegs ein *Rothschild* sein sollte, für einen leichtsinnigen Verschwender erklären wird, falls er gelegentlich die obige Summe von 1,6 Pfennige an das fragliche Spiel wagt? Er riskiert dabei im äufsersten Falle 1,6 Pfennige — nämlich wenn gleich beim ersten Wurfe *Kopf* fällt — er rettet seinen Einsatz, wenn es ihm nur gelingt, *viermal Schrift* zu werfen und kann, wenn dies erheblich öfter der Fall ist, eine sehr grofse Summe *gewinnen!* Wenn hier jemand *thöricht* handelt, so ist dies doch wohl einzig und allein *Peter*, welcher, wenn es das Unglück will, jene sehr grofse Summe *verlieren* kann und dafür nur die Aussicht hat, im günstigsten Falle 1,6 Pfennige zu *gewinnen*. Mit anderen Worten: die Sache verhält sich in der Praxis *genau umgekehrt*, wie es die frühere, auf der unzulässigen Prämisse eines Spieles *in infinitum* beruhende Deduktion ergeben hatte.

Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen ergiebt sich also folgendes: da *Peter* schon nach einer *relativ sehr mäfsigen* Anzahl von Würfen *unter keinen Umständen* in der Lage sein kann, den entsprechenden Gewinn auszuzahlen, so erscheint eine Fortsetzung des Spieles über eine gewisse, durch die Zahlungsfähigkeit *Peters* genau bedingte Anzahl von Würfen für *Paul zwecklos* und die Zahlung eines Einsatzes für jeden weiteren Wurf *widersinnig*. Hiernach ist es also *grundfalsch*, die Normierung des zu leistenden Einsatzes von vornherein auf

— mit dem dritten, der sechzehnte — mit dem vierten u. s. f. Wenn sodann die Anzahl aller möglichen Fälle,

---

eine *relativ sehr grofse* oder gar, wie oben geschehen, auf eine *unbegrenzte* Anzahl von Würfen zu basieren, und es ist keineswegs die Schuld der *Mathematik*, wenn hierbei etwas herauskommt, was jeder vernünftigen Praxis zuwiderläuft, sondern diejenige der *Mathematiker*, welche ein *absolut richtiges und vernünftiges* Resultat des mathematischen Calculs in unverständiger Weise angewendet haben. Die *Mathematik* selbst hat *immer und unter allen Umständen* Recht, und sie wird sich *in dubio* auch stets als klüger und zuverlässiger erweisen, als die berühmtesten *Mathematiker*, für welche ja doch immerhin *errare humanum est*.

Es erscheint nun überaus lehrreich, dafs nach *Bernoullis* Aussage gerade das vorliegende Problem ihn auf die Hypothese von dem *relativen* oder *moralischen Nutzen* eines Gewinnes und damit auf die ganze Theorie von der *moralischen Hoffnung* geführt hat. Es erging ihm hier einigermafsen, wie *Saul*, der auszog, um seines Vaters Eselin zu suchen und ein Königreich fand. Ich will damit sagen, dafs diese Theorie sich als wertvoll erweist zur Behandlung einer ganzen Anzahl von Problemen (cf. §§ 15, 16), die für das praktische Leben *sehr viel mehr* Bedeutung haben, als jenes in Wirklichkeit doch recht überflüssige Glücksspiel (wie ja auch ihrer Anwendung auf das fragliche, aber freilich zuvor in dem oben angegebenen Sinne *richtig zu stellende* Problem nichts entgegensteht; nur wird sich *Peter* dann erst recht hüten, das Spiel anzunehmen!); dafs dagegen *Bernoulli* den in der Formulierung jenes Problems enthaltenen *Grundfehler* in keiner Weise aufgeklärt hat, vielmehr durch *unpassende* Anwendung seiner Formel dieser Aufklärung geradezu hinderlich gewesen ist. Denn da die von *Bernoulli* herausgerechneten Werte insofern den *Anschein einer gewissen Vernünftigkeit* erwecken, als nunmehr an die Stelle der früheren Lösung ∞ ganz *bestimmte endliche* Zahlen treten, so haben sich thatsächlich die späteren Mathematiker zumeist bei dieser angeblichen Lösung beruhigt, und selbst eine so gewaltige und für die Wahrscheinlichkeits-Rechnung geradezu klassische Autorität wie *Laplace* hat dieselbe

obschon dieselbe unendlich grofs ist, vorläufig mit N bezeichnet wird, so giebt es offenbar $\frac{1}{2}$ N Fälle, in denen Paul 1 Dukaten gewinnt; $\frac{1}{4}$ N, in denen er 2; $\frac{1}{8}$ N, in denen er 4; $\frac{1}{16}$ N, in den er 8 gewinnt u. s. f. in infinitum. Sei nun das Gesamtvermögen des Paul $= \alpha$, so hat die fragliche Gewinnhoffnung den Wert:

---

ohne jede Kritik reproduziert (Théorie analytique des probabilités, Livre II, Art. 42): „Quandoque dormitat bonus Homerus“. Es ist daher nicht zu verwundern, dafs man selbst noch in den modernen Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeits-Rechnung die Sache geradeso fehlerhaft dargestellt findet, obgleich schon Poisson in seinen „Recherches sur la probabilité des jugements“, (1837) auf die Unzulänglichkeit dieser Lösung aufmerksam gemacht hat (a. a. O. p. 75). Die einzige mir bekannte Ausnahme bildet das oben citierte Buch von Bertrand, mit dessen Ausführungen über diesen Gegenstand (S. 94 ff.) ich indessen keineswegs durchweg einverstanden bin.

Im übrigen scheint mir doch ein einziger Blick auf die im übernächsten Paragraphen (§ 19) mitgeteilten Zahlen zu zeigen, dafs dieselben für die Praxis völlig unbrauchbar sind. Denn wenn dort gesagt wird, dafs die moralische Hoffnung eines Menschen, der gar nichts besitzt (und das heifst, nach der hier gegebenen Definition, eines solchen, der eben am Verhungern ist!), bei dem fraglichen Spiele 2 Dukaten beträgt, dagegen 3, wenn man 10, und 6, wenn man 1000 besitzt, so kann ich hierin absolut nichts erblicken, was zum gesunden Menschenverstande irgend welche Beziehungen hat.

Nicht das Vermögen Pauls, sondern dasjenige Peters (oder genauer ausgedrückt, diejenige Summe, die Peter für das betreffende Spiel disponibel hat) ist in erster Linie für die Berechnung des Einsatzes mafsgebend, da dasselbe — nach Festsetzung der Münz-Einheit, um welche überhaupt gespielt wird — über die Maximalzahl der zulässigen und somit einzig und allein mit einem Einsatze zu bezahlenden Würfe entscheidet. —

$$\sqrt[N]{(\alpha+1)^{\frac{N}{2}} . (\alpha+2)^{\frac{N}{4}} . (\alpha+4)^{\frac{N}{8}} . (\alpha+8)^{\frac{N}{16}} \ldots\ldots} - \alpha$$

oder:

$$\sqrt[2]{\alpha+1} . \sqrt[4]{\alpha+2} . \sqrt[8]{\alpha+4} . \sqrt[16]{\alpha+8} \ldots\ldots - \alpha.$$ [11]

§ 19.

Aus dieser Formel für die Gewinnhoffnung des Paul folgt, daſs deren Wert mit der Zunahme des Vermögens wächst, daſs dieselbe aber niemals unendlich groſs wird, auſser wenn zugleich das vorhandene Vermögen unendlich groſs ist[12]. Als besondere Folgerungen erhält man noch

---

[11] Kürzer wieder folgendermaſsen: da die verheiſsenen Gewinne die Werte:

$$1,\ 2^1,\ 2^2, \ldots\ 2^{n-1}, \ldots$$

haben, und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots$$

sind, so findet man (s. Anm. 4) als Wert der moralischen Hoffnung:

$$H = (\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} (\alpha+4)^{\frac{1}{8}} \ldots (\alpha+2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \ldots - \alpha.$$

[12] Man kann nämlich leicht zeigen, daſs das in H vorkommende unendliche Produkt für jeden endlichen Wert α *konvergiert*, d. h. einen bestimmten *endlichen* Wert besitzt. Setzt man:

$$P(\alpha) = (\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} \ldots (\alpha+2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \ldots\ldots$$

$$= \prod_{n=1}^{n=\infty} (\alpha+2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}},$$

so hat man zunächst für $\alpha = 0$:

$$P(0) = \prod_1^{\infty} (2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} = \prod_1^{\infty} 2^{\frac{n-1}{2^n}},$$

folgendes: Wenn Paul garnichts besitzt, so ist der Wert seiner Gewinnhoffnung $= \sqrt[2]{1} \,.\, \sqrt[4]{2} \,.\, \sqrt[8]{4} \,.\, \sqrt[16]{8} \ldots$ d. h. gleich 2 Dukaten[13]. Besitzt er 10 Dukaten, so repräsentiert seine Gewinnhoffnung einen Wert von ungefähr 3 Dukaten; ferner ungefähr $4^1/_3$ Dukaten bei einem Vermögen von 100, und endlich 6 bei einem Vermögen von 1000. Hieraus ist leicht zu entnehmen, welche ungeheuren Reichtümer jemand besitzen müfste, um die Gewinnhoffnung des Paul mit Vorteil für 20 Dukaten kaufen zu können. Freilich ist dieser Kaufpreis etwas verschieden von der Gewinnhoffnung, die der Betreffende bei einem gewissen Vermögen α besitzen würde, indessen ist die fragliche Differenz sehr unerheblich, wenn α eine grofse Zahl bedeutet. Bezeichnet man nämlich den genauen Kaufpreis

---

also:

$$\lg P(0) = \lg 2 \cdot \sum_1^\infty \frac{n-1}{2^n} = \frac{\lg 2}{2^2}\left\{1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots\right\}.$$

Nun ist bekanntlich für $x < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n \cdot x^{n-1} + \cdots,$$

also für $x = \frac{1}{2}$:

$$2^2 = 1 + \frac{2}{2}, + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots$$

und daher:

$$\lg P(0) = \lg 2,$$

d. h.

$$P(0) = 2.$$

Hiernach wird:

$$\frac{P(\alpha)}{P(0)} = \frac{P(\alpha)}{2} = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2^n}} < \prod_1^\infty (1+\alpha)^{\frac{1}{2^n}} \text{ d.h.} < 1 + \alpha.$$

[13] Der betreffende Ausdruck ist nämlich kein anderer, als der in der vorigen Anmerkung mit P (0) bezeichnete.

mit x, so bestimmt sich dessen Wert aus der Gleichung:

$$\sqrt[2]{\alpha+1-x}.\sqrt[4]{\alpha+2-x}.\sqrt[8]{\alpha+4-x}.\sqrt[16]{a+8-x}\ldots\ldots=\alpha$$

und dieser Gleichung wird, wenn α eine grofse Zahl ist, in der That näherungsweise genügt durch den Wert[14]:

$$x=\sqrt[2]{\alpha+1}.\sqrt[4]{\alpha+2}.\sqrt[8]{\alpha+4}.\sqrt[16]{\alpha+8}\ldots\ldots-\alpha.$$

Nachdem ich diese Abhandlung in der Gesellschaft vorgetragen hatte, schickte ich eine Abschrift davon dem oben erwähnten Herrn Nicolaus Bernoulli, um seine Meinung über meine Lösung der von ihm vorgelegten Schwierigkeit zu erfahren. In einem Briefe, den dieser im Jahre 1732 an mich schrieb, erklärte er nun, dafs ihm meine Ansicht über die Wertbestimmung von Glücksfällen sehr zusage, sobald es sich darum handele, dafs jemand seine eigene Chance abzuschätzen habe. Anders aber verhalte sich die Sache, wenn ein Dritter als Richter jedem Mitspieler

---

[14] Setzt man in der ursprünglichen Gleichung:

$$\alpha-x=\alpha', \text{ also: } \alpha=\alpha'+x,$$

so geht derselbe zunächst über in die folgende:

$$\sqrt[2]{\alpha'+1}\cdot\sqrt[4]{\alpha'+2}\cdot\sqrt[8]{\alpha'+4}\cdot\ldots\ldots=\alpha'+x$$

oder:

$$x=\sqrt[2]{\alpha'+1}\cdot\sqrt[4]{\alpha'+2}\cdot\sqrt[8]{\alpha'+4}\cdot\ldots\ldots-\alpha'.$$

Nun lehrt die Rechnung, dafs bei relativ grofsen Werten von α' — denen ja um so mehr auch grofse Werte von α entsprechen — der Wert von x relativ klein, also $\alpha=\alpha'+x$ verhältnismäfsig wenig verschieden von α' ausfällt. Infolge dessen kann man dann näherungsweise α' durch α ersetzen, wodurch die Endgleichung des § 19 zum Vorschein kommt.

den Wert seiner Gewinnhoffnung nach Recht und Billigkeit angeben solle, wie ich das in ähnlicher Weise selbst in § 2 auseinandergesetzt habe. Sodann teilte er mir auch die Ansicht mit, welche der berühmte Mathematiker Cramer einige Jahre vor Abfassung meiner Abhandlung geäuſsert hatte und die ich der meinigen so völlig ähnlich fand, daſs diese Übereinstimmung bei einem derartigen Gegenstande höchst merkwürdig erscheint. Daher mag es sich wohl lohnen, die Worte anzuführen, mit denen Cramer in einem Briefe vom Jahre 1728 meinem Oheim jene Ansicht mitgeteilt hat; dieselben lauten folgendermaſsen.

„Ich weiſs nicht, ob ich mich täusche, aber ich glaube, ich habe die Lösung jenes sonderbaren Falles, den Sie in Ihrem Briefe vom 9. September 1713 (Probl. 5, S. 402) Herrn de Montmort vorgelegt haben. Um den Fall zu vereinfachen, will ich annehmen, A werfe ein Geldstück in die Luft, B verpflichte sich, ihm 1 Thaler zu geben, wenn die Seite mit dem Kreuze beim ersten Wurfe nach oben fällt; 2 Thaler, wenn dies erst beim zweiten eintritt; 4, wenn beim dritten; 8, wenn beim vierten u. s. f. Das Paradoxe liegt alsdann darin, daſs die Rechnung als Äquivalent, welches A dem B geben müſste, eine unendlich groſse Summe ergiebt, was doch widersinnig erscheint, da kein halbwegs vernünftiger Mensch dafür 20 Thaler geben würde. Woher rührt nun dieser Unterschied zwischen der mathematischen Rechnung und der üblichen Schätzung? Ich glaube, er beruht darauf, daſs (in der Theorie) die Mathematiker das Geld lediglich nach seiner Menge, (in der Praxis) vernünftige Leute hingegen nach dem Nutzen schätzen, den sie daraus ziehen können. Was die mathematische Hoffnung unendlich

grofs macht, ist die ungeheure Summe, welche ich gewinnen kann, wenn die Seite mit dem Kreuze erst sehr spät, etwa beim hundertsten oder tausendsten Wurf auffällt. Aber diese Summe bedeutet, wenn ich als vernünftiger Mensch urteile, nicht mehr für mich, sie macht mir nicht mehr Vergnügen[15], bestimmt mich nicht mehr zur Annahme des Spieles, als wenn sie nur 10 oder 20 Millionen Thaler betrüge. Nehmen wir also an,

[15] Da Summen wie 2^{100} oder gar 2^{1000} Thaler überhaupt nicht existieren, so hat es doch gar keinen Sinn, feststellen zu wollen, was mir eine derartige Summe gegebenen Falls für ein Vergnügen bereitet, und auf eine solche, völlig nichtssagende Festsetzung die weitere Theorie dieses Spieles zu begründen. Im übrigen kommt aber Cramer der richtigen Lösung des Problemes weit näher, als Bernoulli; denn durch seine Annahme, dafs alle Summen über 2^{24} Thaler unter sich gleichwertig sind, oder „besser gesagt, dafs ich nie mehr als 2^{24} Thaler erhalten kann", wird in der That das Spiel in infinitum vollständig eliminiert, und dasselbe ist in Wahrheit mit dem 24. Wurfe vollständig erledigt. Fällt auch noch dieser Wurf für A (Paul) günstig aus — d. h. kommt Kreuz noch immer nicht zum Vorschein — so hat B (Peter) die versprochenen 2^{24} Thaler zu zahlen, da ja nunmehr frühestens beim 25. Wurfe Kreuz fallen kann. Hiernach wird sich die mathematische Hoffnung des A wiederum berechnen aus der Formel: $h = \frac{n}{2} + 1$, also da hier $n = 24$ ist: $h = 13$, was genau mit dem Cramerschen Resultate übereinstimmt.

Cramers Lösung wäre also geradezu vollkommen, wenn er jene nur so beiläufig ausgesprochene Annahme, dafs überhaupt nicht mehr als 2^{24} Thaler gezahlt werden, zur Hauptsache gemacht und die notwendige Begrenzung des Spieles, statt auf eine ganz vage Hypothese über den relativen Wert grofser Summen, auf die von Fall zu Fall zwar veränderliche, aber jedesmal unzweideutig definierbare Zahlungsfähigkeit des B gegründet hätte.

dafs alle Summen über 10 Millionen oder der gröfseren Bequemlichkeit halber über $2^{24} = 16\,777\,216$ Tahler unter sich gleichwertig sind, oder besser gesagt, dafs ich nie mehr als 2^{24} Thaler erhalten kann, wie spät auch das Kreuz zum Vorschein komme, so hat meine Hoffnung den Wert:

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \cdots + \frac{1}{2^{24}}\cdot 2^{23}$$

$$+\frac{1}{2^{25}}\cdot 2^{24} + \frac{1}{2^{26}}\cdot 2^{24} + \frac{1}{2^{27}}\cdot 2^{24} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}$$

$$+\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots$$

$$= 12 + 1$$

$$= 13.$$

Auf diese Weise ist der moralische Wert meiner Hoffnung auf 13 Thaler reduziert und das zu zahlende Äquivalent dafür auf ebensoviel, was weit vernünftiger erscheint, als wenn man dasselbe unendlich grofs macht.“

Bis hierher ist die Darstellung der fraglichen Lösung zu unbestimmt und nicht einwandfrei. Wenn es nämlich wahr ist, dafs uns die Summe 2^{25} nicht gröfser erscheint als 2^{24}, so braucht man auf die Summe, die ich erst nach dem 24ten Wurfe gewinnen kann, überhaupt keine Rücksicht zu nehmen, da ich eventuell schon vor dem 25. Wurfe $2^{24}-1$ besitze[16], was

---

[16] Die Zahl $2^{24}-1$ scheint mir auf einem Irrtume Bernoullis zu beruhen: bei den Spielbedingungen, wie sie oben gestellt sind, kann ein solcher Gewinn niemals zum Vorschein kommen. Dies wäre nur dann der Fall, wenn vereinbart ist, dafs B dem A 1 Thaler zu zahlen hat, wenn beim 1. Wurfe Kreuz fällt; hierzu noch 2 Thaler, wenn auch beim 2. Wurfe, weitere 4 Thaler, wenn auch beim 3. Wurfe Kreuz fällt u. s. f. Gelingt es also dem

bei dieser Theorie mit 2^{24} gleichwertig erscheint. Man kann daher mit demselben Rechte sagen, meine Hoffnung sei statt 13 Thaler deren nur 12 wert. Übrigens sage ich das keineswegs, um das Princip des obigen Autors anzufechten, da dasselbe ja auch das meinige ist, dafs nämlich vernünftige Leute das Geld nach dem Nutzen schätzen sollen, den sie daraus ziehen können, vielmehr nur deshalb, damit niemand daraus Veranlassung nehme, über diese Theorie selbst abfällig zu urteilen. Gerade dasselbe sagt auch der berühmte Cramer mit den nunmehr folgenden Worten, die ganz nach unserem Sinne sind. Er fährt nämlich so fort:

„Man könnte für dasselbe (das Äquivalent) einen noch kleineren Wert finden, wenn man irgend eine andere Hypothese über den moralischen Wert von Reichtümern zu Grunde legt. Denn die soeben angewendete ist keineswegs genau richtig, da es wahr sein dürfte, dafs 100 Millionen einem mehr Vergnügen machen, als 10 Millionen, wenn auch nicht 10 mal so viel. Wenn man z. B. annehmen wollte, dafs der moralische Wert der Güter der Quadratwurzel ihres mathematischen Wertes proportional sei, d. h. dafs das Vergnügen, welches mir 40 Millionen bereiten,

---

A 24 mal hintereinander Kreuz zu werfen, so hat er einen Gewinn von:

$$1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{23} = 2^{24} - 1.$$

Die mathematische Hoffnung des A ist in diesem Falle:

$$h = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \cdots + \frac{1}{2^{24}} \cdot 2^{23} = 12,$$

was gleichfalls mit der von Bernoulli gegebenen Zahl übereinstimmt. Da aber die oben fixierten Spielbedingungen andere sind, so ist der ganze Einwurf Bernoullis durchaus hinfällig.

doppelt so grofs sei als dasjenige, welches mir 10 Millionen machen, so hätte meine moralische Hoffnung den Wert:

$$\frac{1}{2}\sqrt{1}+\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\sqrt{4}+\cdots\cdots=\frac{1}{2-\sqrt{2}}.$$

Aber diese Gröfse ist noch nicht das fragliche Äquivalent, denn dieses ist nicht ohne weiteres dem Werte der Hoffnung gleich, sondern so grofs, dafs der Schmerz über seinen Verlust gleich ist der moralischen Hoffnung auf das Vergnügen, welches mir sein Gewinn bereiten würde. Folglich mufs (nach unserer Voraussetzung) jenes Äquivalent betragen:

$$\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{6-4\cdot\sqrt{2}}=2,9\ldots,$$

also weniger als 3, was ziemlich gering ist und dennoch, wie ich glaube, der üblichen Schätzung näher kommt, als 13."

Pierer'sche Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

2. **Die drei albertinisch-ernestinischen Münzschriften.** Herausgegeben von *W. Lotz.* Preis 2 M.
3. **Liquidation und Restitution der deutschen Volkswirtschaft nach dem dreissigjährigen Kriege.** (Colloquium zwischen Bürger, Bauer und Edelmann.) Herausgegeben von *E. Gothein.* Preis 3 M. 20 Pf.
4. **James Anderson: Drei Schriften über Korngesetze und Grundrente.** Herausgegeben von *L. Brentano.* Preis 3 M. 60 Pf.
5. **William Stafford's drei Gespräche über die in der Bevölkerung verbreiteten Klagen.** Herausgegeben von *Emanuel Leser.* Preis 3 M. 40 Pf.
6. **Robert Malthus: Drei Schriften über Getreidezölle** aus den Jahren 1814 und 1815. Übersetzt und herausgegeben von *Emanuel Leser.* Preis 2 M. 60 Pf.
7. 8. **Englische Wirtschaftsgeschichte.** Eine Einleitung in die Entwicklung von Wirtschaftsleben und Wirtschaftslehre. Von *W. J. Ashley.* Autorisierte Übersetzung aus dem Englischen von R o b. O p p e n h e i m. 2 Teile. Preis 14 M. 80 Pf.
9. **Die Grundlage der modernen Wertlehre: Daniel Bernoulli,** Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen (Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis). Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen von Alfred Pringsheim. Mit einer Einleitung von Ludwig Fick. Preis M. 1.20.

Ferner sind in Aussicht genommen: Die beiden ältesten Lehrbücher der Finanzverwaltung, der Dialogus de scaccario und die Schrift Fortescue's über die Monarchie — die Schrift des Oresmius — eine Reihe von Schriften aller Nationen über das Geld aus dem 16., 17. und 18. Jahrhundert — die Schriften von Mun, Petty — weitere Grundrententheoretiker — einige Schriften Owens u. a. m.

Die Verlagshandlung hofft auf freundliche Aufnahme des Unternehmens nicht nur bei den Lehrern wie den Studenten der Staatswissenschaften, sondern auch in weiteren Kreisen, wo das Bedürfnis herrscht, sich über die vielen Fragen des Staatslebens an der Hand der Geschichte zu unterrichten.

Die Sammlung wird in Heften, durchweg in Leinwand kartoniert, ausgegeben. Der Druckbogen wird mit 25 Pf., in einzelnen Ausnahmefällen mit 30 Pf. Ladenpreis berechnet.

Jedes Heft ist auch einzeln zu haben.

Leipzig. **Duncker & Humblot.**

